த.பா.நி. (க.வெ.) வரிசை எண்—336

முற்கால வடிவ கணிதமும் தற்கால வடிவ கணிதமும்

பட்டப் படிப்பிற்குரியது

(திருத்தப்பட்ட பாடத் திட்டத்தின்படி வெளியிடப்படுகிறது)

ஆசிரியர்
செல்வி கே. ஜெகதாம்பாள், எம்.ஏ., எல்.டி.,
முதல்வர்
அரசினர் மகளிர் பயிற்சிக் கல்லூரி,
கோயம்புத்தூர்.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—July, 1972

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 336

© Tamil Nadu Text Book Society

Classical and Modern Geometry

Selvi K. JEGATHAMBAL

Price Rs. 8-25

'Published by the Tamil Nadu Text Book Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.'

Printed by
Jupiter Enterprises of Srinivasam Press,
1, Smith Lane, Madras-2.

அணிந்துரை

திரு. இரா. நெடுஞ்செழியன்
(தமிழகக் கல்வி-உள்ளாட்சித்துறை அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பதினோராண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பி.ஏ. வகுப்பு மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்றுவந்தனர். 1968 ஆம் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் புகுமுக வகுப்பிலும் (P.U.C.) 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து பட்டப் படிப்பு வகுப்புகளிலும் அறிவியல் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மன நிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது. இவ்வகையில், கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்க்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக்கழகம் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெருமுயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்ல வேண்டும்.

பலதுறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், தத்துவம், புவியியல், புவியமைப்பியல், மனையியல், கணிதம், பௌதிகம், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், விலங்கியல், தாவரவியல், பொறியியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் தனி நூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இரு வகையிலும் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் வெளியிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றுன 'முற்கால வடிவ கணிதமும் தற்கால வடிவ கணிதமும்' என்ற இந்நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் 336 ஆவது வெளியீடாகும். இதுவரை 371 நூல்கள் வெளி வந்துள்ளன. இந்நூல் மைய அரசு கல்வி, சமூக நல அமைச்சகத்தின் மாநில மொழியில், பல்கலைக்கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது.

உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும். அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பல்வகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம்கலந்த நன்றி உரியதாகுக.

பொருளடக்கம்

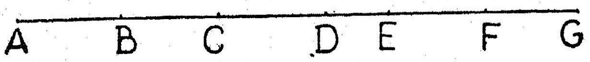
			பக்கம்
I.	இசைப்புள்ளி வரிசைகளும் கோட்டுக் கற்றைகளும்	...	1
II.	வட்டங்கள்	...	84
III.	வடிவொப்பு மையங்கள்	...	157
IV.	சமத் தொடுகோட்டச்சும் ஓரச்சு வட்டங்களும்		183
V.	தன்மாற்றம்	...	261
	கலைச்சொற்கள் (ஆங்கிலம்-தமிழ்)	...	344
	,, (தமிழ்-ஆங்கிலம்)	...	350
	Bibliography	...	355

1. இசைப்புள்ளி வரிசைகளும் கோட்டுக் கற்றைகளும்

(Harmonic Ranges and Pencils)

புள்ளி வரிசை

ஒரு நேர்கோட்டில் அமைந்த புள்ளிகளின் தொகுப்பு புள்ளி வரிசை (Range of Points) எனப்படும். இதனைச் சாதாரணமாக வரிசை (Range) என்றும் சொல்வோம்.



படம் 1

A, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G* என்னும் புள்ளிகள் ஒரு நேர்கோட்டில் இருப்பதால் *ABCDEFG* ஒரு புள்ளி வரிசை. இந்த நேர் கோட்டில் அநேக புள்ளி வரிசைகள் இருக்கின்றன.

(உ–ம்): *ABC*, *BCDE*, *DEFG*, *ACEFG*, *ACED*, *BFDE*, *FDGBA* முதலியன அக்கோட்டில் காணப்படும் சில புள்ளி வரிசைகள்.

குறிப்பு: (1) புள்ளிகளைத் தனித்தனியே குறிப்பிடும்போது *A*, *B*, *C*, *D*, *E* என்னும் புள்ளிகள் என்றும், வரிசையைக் குறிப்பிடும்போது *ABCDE* என்னும் புள்ளி வரிசை என்றும் குறிப்பிடுகிறோம்.

(2) புள்ளிகளை இடமிருந்து வலமாக ஒரே ஒழுங்கில்தான் எழுதவேண்டும் என்பதல்ல. மாற்றியும் எழுதலாம். *ACBD*

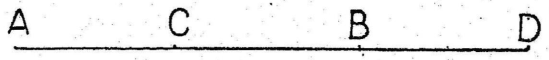
என்று எழுதினால் முதலில் *A* யிலிருந்து *C* க்கும், அதன் பிறகு *B* க்கும், அதன் பிறகு *D* க்கும் செல்வதாக அர்த்தம் கொள்ளலாம்.

நேர்கோடுகளுக்கு அளவும் திசையும் உண்டு. இரண்டு புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்கோட்டுக்கு இடமிருந்து வலமாகச் செல்லும்போது அதன் அளவை நேர்க்குறி (Positive) யிட்டும், வலமிருந்து இடமாகச் செல்லும்போது அதன் அளவை எதிர்க் குறியிட்டும் (Negative) எழுதுவது வழக்கம்.

(உ-ம்): *AB*, *BC*, *CD*, *AC*, *BF* முதலியன பாஸிடிவ் (அல்லது) நேர் அளவுகள் உள்ளவை (Positive).

BA, *CB*, *DC*, *FA*, *FB* முதலியன நெகடிவ் (அல்லது) எதிர் அளவுகள் உள்ளவை (Negative).

ஏதாவது ஒரு நேர்கோட்டை ஒரு திசையில் அளக்கும்போது அதைப் பாஸிடிவ் (நேர்) என்று கொண்டால், அதற்கு எதிர்த் திசையில் அளக்கும்போது அதை நெகடிவ் (எதிர்) என்று கொள்வது மரபு.



படம் 2

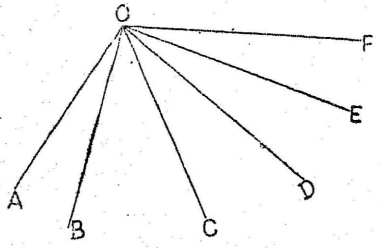
(உ-ம்): படம் 2ல் *AB*, *CD* பாஸிடிவ் என்றால், *BC*, *DC* முதலியவை நெகடிவ்.

கோட்டுக் கற்றைகள்

ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகளின் தொகுப்பு ஒரு கோட்டுக் கற்றை எனப்படும். சாதாரணமாக இதைக் கற்றை என்றும் சொல்வோம். ஒரு கோட்டுக் கற்றையிலுள்ள கோடுகளுக்குக் கதிர்கள் (Rays) என்றும் சொல்வதுண்டு.

படம் 3 இல் *OA*, *OB*, *OC*, *OD*, *OE*, *OF*, *OG* ஒரு கோட்டுக் கற்றையிலுள்ள கதிர்கள். இதை *O* (*A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*) என்று குறிப்பிடுகிறோம். *O* (*A*, *B*, *C*, *D*), *O* (*B*, *C*, *D*, *E*, *F*), *O* (*A*, *C*, *E*, *F*, *D*), *O* (*B*, *D*, *E*, *F*), *O* (*D*, *F*, *B*, *C*), *O* (*F*, *B*, *C*, *A*) முதலியவையும் இப்படத்திலுள்ள சில கோட்டுக் கற்றைகள்.

குறிப்பு: இக்கோடுகளை இடமிருந்து வலமாக ஒரு ஒழுங்கில் தான் எழுத வேண்டும் என்பதல்ல. மாற்றியும் எழுத



படம் 3

லாம். $O\,(B, D, E, F)$ என்று எழுதினால் முதலில் OB, பிறகு OD, பிறகு OE, பிறகு OF இவற்றின் இடங்களுக்கு ஒரு கோட்டைச் சுழற்றுவதாக அர்த்தம் கொள்ளலாம்.

கோணங்களின் திசைகள்

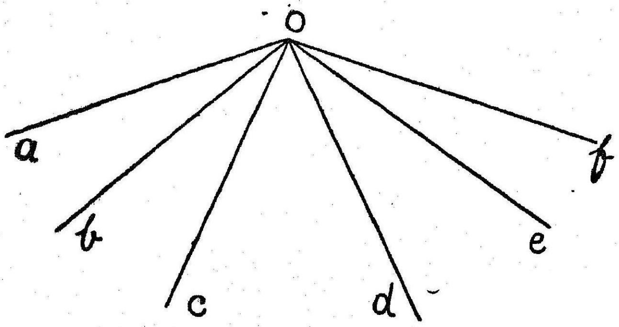
கோணங்களுக்குக்கூட அளவும் திசையும் உண்டு. ஒரு கோணத்தை இடமிருந்து வலமாக அதாவது இடஞ்சுழியாக அளந்தால் அது பாஸிடிவ் (Positive) அல்லது நேர்க்குறியுடையது என்றும், வலமிருந்து இடமாக அதாவது வலம் சுழியாக அளந்தால் அது நெகடிவ் (Negative) அல்லது எதிர்க்குறியுடையது என்றும் சொல்கிறோம். வலம் சுழி என்பது கடிகாரத்தின் முள் நகரும் திசை என்பதையும், இடஞ்சுழி என்பது அதற்கு எதிர்த்திசை என்பதையும் அறிக.

(உ-ம்): படம் 3ல் $\angle AOB$, $\angle COD$, $\angle COF$, $\angle COF$ முதலியன பாஸிடிவ்; $\angle BOA$, $\angle DOA$, $\angle FOC$ முதலியன நெகடிவ்.

நேர்கோடுகளை a, b, c என்று சிறிய எழுத்துக்களாலும் குறிக்கலாம். ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லும் கோடுகள் a, b, c, d, e, f ஒரு கோட்டுக் கற்றையை உண்டாக்குகின்றன. ஒரு கோட்டுக் கற்றையை $abcdef$, $abcd$, $cdbfe$ என்று குறிக்கிறோம்.

குறிப்பு: கோடுகளைத் தனித்தனியே எழுதும்போது a, b, c, d, e என்று குறியிட்டும், கோட்டுக் கற்றையைக் குறிக்கும்

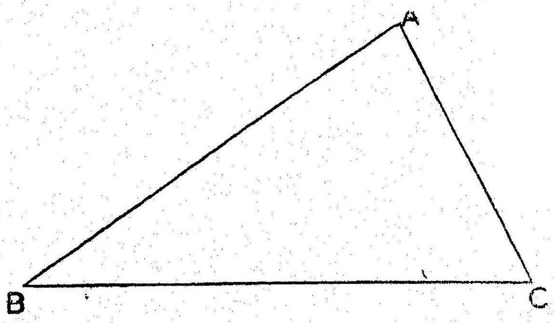
போது *abcd*, *bcdfe* என்றும் எழுதுவதைக் கவனிக்கவும். *a*, *b* என்னும் 2 கோடுகளுக்கு இடையே உள்ள கோணத்தை $\hat{ab}$ என்று குறிக்கிறோம்.



படம் 4

முக்கோணத்தின் பரப்பின் திசை

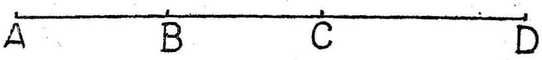
ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்புக்கும் அளவும் திசையும் உண்டு. ஒரு முக்கோணத்தைச் சுற்றி வரும்போது அது இடது பக்கத்தில் இருந்தால் அதன் பரப்பு பாஸிடிவ் என்றும், அதை வலமாகச் சுற்றினால் அதன் பரப்பு நெகடிவ் என்றும் சொல்கிறோம். கடிகாரத்தின் முள் நகரும் திசைக்கு எதிர்த் திசையில் சுற்றினால் பாஸிடிவ் என்பதையும், கடிகாரத்தின் முள் நகரும் திசையில் சுற்றினால் நெகடிவ் என்பதையும் காண்க.



படம் 5

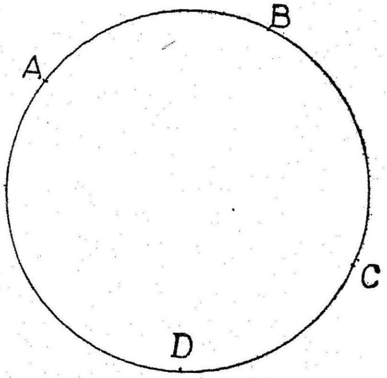
மேற்கண்ட படத்தில் $\triangle ABC$ பாஸிடிவ் என்றும், $\triangle ACB$ நெகடிவ் என்றும் அறிக.

குறுக்கு விகிதம் (Cross Ratio)



படம் 6

ABCD என்னும் புள்ளி வரிசையை எடுத்துக்கொள்வோம். அதில் $\frac{AB.CD}{AD.CB}$ என்னும் விகிதத்தை *ABCD* என்ற புள்ளி வரிசையின் குறுக்கு விகிதம் (Cross Ratio) என்று சொல்கிறோம்.



படம் 7

அதை (*ABCD*) என்று எழுதுகிறோம். குறுக்கு விகிதத்தை ஞாபகத்திலிருத்தும் சுலப வழி: ஒரு வட்டத்தில் *A*, *B*, *C*, *D* என்னும் புள்ளிகளை ஒரே ஒழுங்கில் வலஞ்சுழியாகக் குறிக்கவும். குறுக்கு விகிதத்தில் தொகுதி *AB.CD* என்று *A*யிலிருந்து ஆரம்பித்து வலஞ்சுழியாகவும், பகுதி *AD.CB* என்று *A*யிலிருந்து ஆரம்பித்து இடஞ்சுழியாகவும் எழுதினால் குறுக்கு விகிதம் கிடைக்கும்.

குறிப்பு: *AC* என்னும் நேர்கோட்டை *B* என்னும் புள்ளியில் உட்புறமாக *AB* : *BC* என்னும் விகிதத்திலும், *D* என்னும் புள்ளியில் வெளிப்புறமாக *AD* : *DC* என்னும் விகிதத்திலும் பிரித்தால், இந்த இரண்டு விகிதங்களுக்கும் உள்ள விகிதம் $\frac{AB}{BC} : \frac{AD}{DC}$ ஆகும்.

$$\text{இது}\quad \frac{AB\,.\,DC}{BC\,.\,AD} = \frac{AB\,.\,CD}{AD\,.\,CB}$$

$$= \text{குறுக்கு விகிதம் } (A\,B\,C\,D)$$

ஆகவே

குறுக்கு விகிதம், ஒரு நேர்கோட்டை 2 புள்ளிகளில் பிரிக்கும் விகிதங்களின் விகிதமாகும்.

இசைப்புள்ளி வரிசை — ஹார்மோனிக் வரிசை (Harmonic Range)

நான்கு புள்ளிகள் கொண்ட ஒரு புள்ளி வரிசையின் குறுக்கு விகிதம் -1 ஆனுல், அது இசைப்புள்ளி வரிசை அல்லது ஹார்மோனிக் வரிசை (Harmonic Range) ஆகும்.

$AB.CD$ ஒரு இசைப்புள்ளி வரிசை என்றுல்

$$(A\,B\,C\,D) = -1.\ (\text{அ-து})\ \frac{AB\,.\,CD}{AD\,.\,CB} = -1$$

$$\frac{AB\,.\,CD}{AD\,.\,CB} = -1.$$

$$\therefore\quad \frac{AB}{BC} = -\frac{AD}{DC}$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$$

$\therefore$ B யும் D யும் AC யை உட்புறமாகவும், வெளிப்புறமாகவும் ஒரே விகிதத்தில் பிரிகின்றன. ஆகவே, ஒரு நேர்கோட்டை உட்புறமாகவும், வெளிப்புறமாகவும் ஒரே விகிதத்தால் பிரித்தால் கிடைக்கும் புள்ளிவரிசை இசைப்புள்ளி வரிசை (ஹார்மோனிக் வரிசை) ஆகும்.

இசைப்புள்ளி வரிசையை AC, BD என்றும், குறுக்கு விகிதத்தை (AC, BD) என்றும் குறிப்பதும் உண்டு.

இதிலிருந்து இசைப்புள்ளி வரிசைக்கு மற்ருெரு வரையறையும் (Definition) கிடைக்கிறது.

இசைப்புள்ளி வரிசை

ஒரு நேர்கோட்டை உட்புறமாகவும் வெளிப்புறமாகவும் இரண்டு புள்ளிகளில் ஒரே விகிதத்தில் பிரித்தால் கிடைக்கும் புள்ளி வரிசை இசைப்புள்ளி வரிசை ஆகும்.

AC யை, B, D என்னும் புள்ளிகளில்

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$$

என இருக்கும்படி பிரித்தால்,

$$\frac{AB}{BC} = -\frac{AD}{DC}$$

$$\therefore \frac{AB \cdot DC}{BC \cdot AD} = -1$$

$$\therefore \frac{AB \cdot CD}{AD \cdot CB} = -1$$

(அ-து) $(ABCD) = -1$,

AC யை B யும் D யும் இசையாக அல்லது ஹார்மோனிக்காகப் (Harmonic) பிரிக்கின்றன என்று சொல்கிறோம்.

இசைத்துணைப் புள்ளிகள் (Harmonic Conjugates)

ஒரு நேர்கோட்டை இசையாகப் பிரிக்கும் இரண்டு புள்ளிகளுக்கு இசைத் துணைப் புள்ளிகள் (ஹார்மோனிக் காஞ்சுகேட்) என்று பெயர்.

(1) AC யை, B, D இசையாகப் பிரித்தால், BD யை, A, C இசையாகப் பிரிக்கும்.

$$(AC, BD) = -1.$$

$$\therefore (ABCD) = -1.$$

(அ-து) $$\frac{AB \cdot CD}{AD \cdot CB} = -1.$$

கோடுகளின் திசைகளை மாற்ற

$$\frac{BA \cdot DC}{DA \cdot BC} = -1.$$

(அ-து) $$\frac{BA \cdot DC}{BC \cdot DA} = -1.$$

(அ-து) $(BADC) = -1.$

(அ-து) A யும் C யும் Bயை ஹார்மோனிக்காகப் பிரிக்கின்றன.

(2) AC யை B, D இசையாகப் பிரித்தால், AC யை D, B யும் இசையாகப் பிரிக்கும்.

$$\therefore (ABCD) = -1.$$

$$\therefore \frac{AB \cdot CD}{AD \cdot CB} = -1.$$

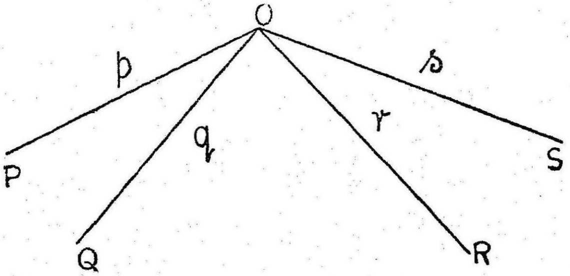
பின்னத்தைத் தலைகீழாக மாற்ற,

$$\frac{AD \, . \, CB}{AB \, . \, CD} = -1.$$

(அ–து) $(ADCB) = -1.$

$\therefore$ D, B என்னும் புள்ளிகள் AC யை ஹார்மோனிக்காகப் பிரிக்கின்றன.

கோட்டுக் கற்றையின் குறுக்கு விகிதம்



படம் 8

$O\,(P, Q, R, S)$ ஒரு கோட்டுக் கற்றை.

அதன் குறுக்கு விகிதம்

$$= \frac{\sin POQ . \sin ROS}{\sin POS . \sin ROQ}$$

கோட்டுக் கற்றையின் குறுக்கு விகிதத்தை $O\,(PQRS)$ என்று குறிப்பிடுகிறோம்.

$$\therefore \; O\,(PQRS) = \frac{\sin POQ . \sin ROS}{\sin POS . \sin ROQ}$$

இதிலுள்ள நேர்கோடுகளை p, q, r, s என்னும் எழுத்துக்களில் குறித்தால், குறுக்கு விகிதத்தை $(pqrs)$ என்று எழுதுகிறோம்.

$$\therefore \quad (pqrs) = \frac{\sin \widehat{pq} . \sin \widehat{rs}}{\sin \widehat{ps} . \sin \widehat{rq}}$$

இசைக் கோட்டுக் கற்றைகள்

ஒரு இசைக்கோட்டுக் கற்றையின் குறுக்கு விகிதம் -1 க்குச் சமமானால் அது இசைக்கோட்டுக் கற்றை அல்லது ஹார்மோனிக் கற்றை (Harmonic Pencil) எனப்படும்.

ஆகவே, $O\ (ABCD)$ இசைக் கோட்டுக் கற்றை ஆனால்

$$\frac{\sin AOB \cdot \sin COD}{\sin AOD \cdot \sin COB} = -1.$$

இசைத் துணைக் கோடுகள் (Harmonic Conjugates)

OB, OD என்னும் கோடுகள் கோணம் AOC யை இசையாகப் பிரிக்கின்றன. ஆகையால் அவற்றை இசைத் துணைக் கோடுகள் (Harmonic Conjugates) என்று சொல்கிறோம்.

ஒரு கோணத்தை இசையாக (ஹார்மோனிக்காக) பிரிக்கும் கோடுகள் இசைத் துணைக்கோடுகள் எனப்படும்.

$O\ (ABCD)$ என்னும் குறுக்கு விகிதத்தை
$O\ (AC, BD)$ என்றும் குறிப்பிடலாம்.

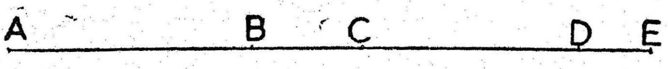
குறிப்பு: (1) இசைக் கோட்டுக் கற்றையை $pqrs$ என்றும் குறிப்பிட்டால், அதன் குறுக்கு விகிதம்

$$(pqrs) = \frac{\sin \widehat{pq} \cdot \sin \widehat{rs}}{\sin \widehat{ps} \cdot \sin \widehat{rq}} = -1.$$

(2) $(pqrs)$ என்னும் குறுக்கு விகிதத்தை
(pr, qs) என்றும் எழுதலாம்.

தேற்றம் 1

A, B, C என்னும் மூன்று புள்ளிகள் அமைந்த ஒரு நேர்கோட்டில் $(A\,B\,C\,D)$, $(A\,B\,C\,E)$க்குச் சமமாக இருக்கும்படி D, E என்னும் இரண்டு புள்ளிகள் இருந்தால் அவை ஒன்றின் மேல் ஒன்று பொருந்தும்.



படம் 9

கொள்கை : A, B, C, D, E ஒரு கோடமைந்த 5 புள்ளிகள்.

$$(ABCD) = (ABCE)$$

நிரூபிக்க : D, E யின் மேல் பொருந்தும் என.

நிரூபணம் : $(ABCD) = (ABCE)$

$$\therefore \frac{AB \cdot CD}{AD \cdot CB} = \frac{AB \cdot CE}{AE \cdot CB}$$

∴ $\frac{AB}{CB}$ என்னும் பொது விகிதத்தை நீக்க,

$$\frac{CD}{AD}=\frac{CE}{AE}$$

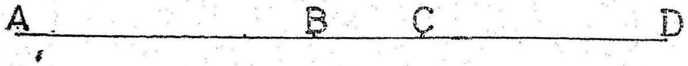
$$\therefore \quad \frac{AE}{CE}=\frac{AD}{CD}.$$

அதாவது AC என்னும் நேர்கோட்டை வெளிப்புறமாக E யும், உட்புறமாக Dயும் ஒரே விகிதத்தால் பிரிக்கின்றன.

∴ D, E என்பவை ஒன்றின் மேல் ஒன்று பொருந்தும்.

தேற்றம் 2

ஒரு கோட்டில் அமைந்த A, B, C, D என்னும் நான்கு புள்ளிகள், AB, AC, AD ஹார்மோனிக் இசைத் தொடரில் உள்ளபடி இருந்தால், $ABCD$ ஒரு ஹார்மோனிக் இசைப் புள்ளி வரிசையாகும்.



படம் 10

கொள்கை : (1) A, B, C, D ஒரு கோடமைந்த நான்கு புள்ளிகள்.

$$(2) \quad \frac{1}{AB}+\frac{1}{AD}=\frac{2}{AC}.$$

நிரூபிக்க : $(ABCD) = -1$ என.

நிரூபணம் :

$$\frac{1}{AB}+\frac{1}{AD}=\frac{2}{AC}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{AB}+\frac{1}{AD}=\frac{1}{AC}+\frac{1}{AC}.$$

$$\therefore \quad \frac{1}{AB}-\frac{1}{AC}=\frac{1}{AC}-\frac{1}{AD}.$$

$$\therefore \quad \frac{AC-AB}{AB\cdot AC}=\frac{AD-AC}{AC\cdot AD}$$

$$\therefore \quad \frac{BC}{AB\cdot AC}=\frac{CD}{AC\cdot AD}$$

$\therefore$ AC யை நீக்கினால்

$$\frac{BC}{AB} = \frac{CD}{AD}.$$

$$AB \cdot CD = AD \cdot BC$$

$$\therefore \quad \frac{AB \cdot CD}{AD \cdot BC} = 1.$$

$\therefore$ BC யின் திசையை மாற்ற $\dfrac{AB \cdot CD}{AD \cdot CB} = -1.$

(அ - து) $(ABCD) = -1.$

இத்தேற்றத்தின் மறுதலை

$ABCD$ ஒரு இசைப்புள்ளி வரிசை ஆனால் AB, AC, AD இசைத் தொடர் ஆகும்.

குறிப்பு: அதே படம் பார்க்கவும்.

கொள்கை: $(ABCD) = -1.$

நிரூபிக்க: $\dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{AD} = \dfrac{2}{AC}$ என.

நிருபணம்: $(ABCD) = -1.$

$$\therefore \quad \frac{AB \cdot CD}{AD \cdot CB} = -1.$$

$$\therefore \quad \frac{AB}{CB} = -\frac{AD}{CD}.$$

$$\therefore \quad \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}.$$

$$\therefore \quad \frac{BC}{AB} = \frac{CD}{AD}.$$

$$\therefore \quad \frac{BC}{AB \cdot AC} = \frac{CD}{AD \cdot AC}.$$

ஆனால் $\dfrac{BC}{AB \cdot AC} = \dfrac{1}{AB} - \dfrac{1}{AC}.$

$$\frac{CD}{AD \cdot AC} = \frac{1}{AC} - \frac{1}{AD}.$$

$$\therefore \quad \frac{1}{AB} - \frac{1}{AC} = \frac{1}{AC} - \frac{1}{AD}.$$

$$\therefore \quad \frac{1}{AB} + \frac{1}{AD} = \frac{2}{AC}.$$

(நி. வே.)

***$ABCD$ என்னும் புள்ளி வரிசையிலுள்ள 24 குறுக்கு விகிதங்கள்**

A, B, C, D என்னும் புள்ளிகளை, அவற்றின் வரிசையை மாற்றி, $\lfloor 4$ அல்லது 24 வரிசைகளாக எழுதலாம். ஆகவே 24 குறுக்கு விகிதங்கள் கிடைக்கும். அவற்றில் சமகுறுக்கு விகிதங்கள் நான்கு நான்காக 6 தொகுப்புகள் (Sets) கிடைக்கும். அவற்றைக் கீழே காணலாம்.

(1) $(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA)$

(2) $(ABDC) = (BACD) = (CDBA) = (DCAB)$

(3) $(ACBD) = (BDAC) = (CADB) = (DBCA)$

(4) $(ACDB) = (BDCA) = (CABD) = (DBAC)$

(5) $(ADBC) = (BCAD) = (CBDA) = (DACB)$

(6) $(ADCB) = (BCDA) = (CBAD) = (DABC)$

ஒவ்வொரு எழுத்தையும் முதலெழுத்தாகக் கொண்டு 6 குறுக்கு விகிதங்கள் உள்ளன. அவை ஒன்றுக்கொன்று சமம் அல்ல.

1. $(ABCD) = \lambda$ என்போம்.

$(BADC)$ என்னும் குறுக்கு விகிதம் முதலிரண்டு எழுத்துக்களை மாற்றியும் கடை இரண்டு எழுத்துக்களை மாற்றியும் போட்டதால் உண்டாகியது.

$$\begin{aligned}(BADC) &= \frac{BA \cdot DC}{BC \cdot DA} \\ &= \frac{(-AB) \cdot (-CD)}{(-AD) \cdot (-CB)} \\ &= \frac{AB \cdot CD}{AD \cdot CB} \\ &= \lambda.\end{aligned}$$

2. $(CDAB)$ என்னும் குறுக்கு விகிதம் $(ABCD)$ யிலிருந்து முதலிரண்டு எழுத்துக்களைக் கடையிலும் கடையிரண்டு எழுத்துக்களை முதலிலும் மாற்றி எழுதியதால் உண்டாகியது.

$$\begin{aligned}(CDAB) &= \frac{CD \cdot AB}{CB \cdot AD} \\ &= \frac{AB \cdot CD}{AD \quad CB} \\ &= (ABCD) \\ &= \lambda.\end{aligned}$$

3. $(DCBA)$ என்னும் குறுக்கு விகிதம் $(CDAB)$ என்னும் குறுக்கு விகிதத்திலிருந்து முதலிரண்டு எழுத்துக்களை மாற்றியும், கடையிரண்டு எழுத்துக்களை மாற்றியும் போட்டதால் உண்டாகியது. இதையே $(ABCD)$ என்னும் குறுக்கு விகிதத்திலிருந்து எல்லா எழுத்துக்களையும் வலமிருந்து இடம் எழுதினுல் கிடைக்கும்.

$$(DCBA) = \frac{DC \, . \, BA}{DA \, . \, BC}$$

$$= \frac{BA \, . \, DC}{DA \, . \, BC}$$

$$= \frac{(-AB) \, . \, (-CD)}{(-AD) \, . \, (-CB)}$$

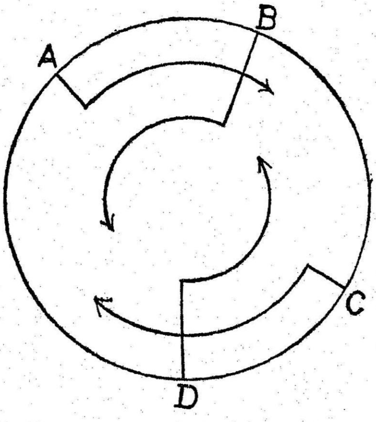
$$= \frac{AB \, . \, CD}{AD \, . \, CB}$$

$$= \lambda.$$

இதிலிருந்து,
$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA) = \lambda$ என்று தெரிகிறது.

மற்ற 5 வரிசைகளிலுள்ள குறுக்குவிகிதங்களும் கூட முதல் வரிசையிலுள்ள குறுக்கு விகிதத்திலிருந்து கிடைக்கப் பெற்ற சம குறுக்கு விகிதங்கள் என்பதை மாணவர்கள் சரி பார்க்கலாம்.

சம குறுக்கு விகிதங்கள் எழுதும் சுலப வழி:



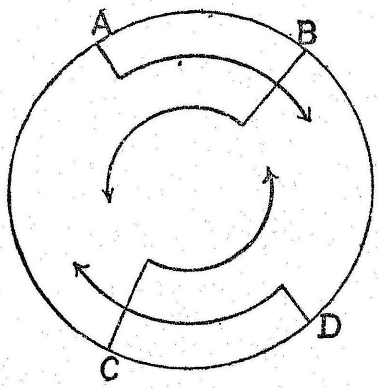
படம் 11

A, B, C, D என்னும் 4 புள்ளிகளை வரிசைக் கிரமமாக ஒரு வட்டத்தில் குறிக்கவும். அப்பொழுது $(ABCD)$ க்குச் சமமான குறுக்கு விகிதங்கள் பெறும் வழி.

A, C யில் ஆரம்பிக்கும் குறுக்கு விகிதங்கள், வலஞ் சுழியாகச் சென்றால் கிடைக்கும். $(ABCD)$, $(CDAB)$ B, D யில் ஆரம்பிக்கும் குறுக்கு விகிதங்கள் இடஞ்சுழியாகச் சென்றால் கிடைக்கும் $(BADC)$, $DCBA)$

$$\therefore \quad (ABCD) = (CDAB) = (BADC) = (DCBA).$$

இரண்டாவது வரிசையை எடுத்துக்கொள்வோம்.



படம் 12

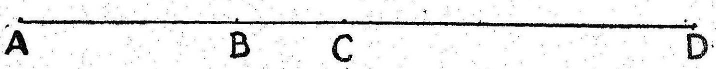
மேற்கண்ட முறையை அனுசரித்து எழுத, $(ABDC) = (DCAB) = (BACD) = (CDBA)$ என்பது கிடைக்கிறது.

இதே முறையை அனுசரித்து மாணவர்கள் மற்ற வரிசைகளிலுள்ள சம குறுக்கு விகிதங்களையும் எழுதிச் சரி பார்க்கலாம்.

24 குறுக்கு விகிதங்களின் மதிப்புகள்

$(ABCD) = \lambda$ என்போம்.

1. முன்னே பார்த்தபடி,



படம் 13

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA) = \lambda.$$

2. $ABCD$ என்பது ஒரு புள்ளி வரிசை.

$$AB.CD + BC.AD + CA.BD$$
$$= AB(AD-AC) + (AC-AB)AD - AC(AD-AB)$$
$$= AB.AD - AB.AC + AC.AD - AB.AD - AC.AD + AC.AB$$
$$= 0$$
$$\therefore \; AB.CD + BC.AD + CA.BD = 0.$$

இவற்றை $AD \cdot BC$ ஆல் வகுக்க,

$$\frac{AB.CD}{AD.BC} + 1 + \frac{CA.BD}{AD.BC} = 0.$$
$$\therefore -\frac{CA.BD}{AD.BC} = 1 - \frac{AB.CD}{AD.CB}$$
$$= 1 - (ABCD)$$

ஆனால் $-\dfrac{CA.BD}{AD.BC} = \dfrac{AC.BD}{AD.BC}$

$$= (ACBD)$$
$$\therefore \; (ACBD) = 1 - (ABCD)$$
$$= 1 - \lambda.$$

$(ACBD)$ என்னும் குறுக்கு விகிதம், $(ABCD)$ யிலிருந்து, இடையிலுள்ள இரண்டு எழுத்துக்களையும் மாற்றுவதால் உண்டானது.

ஆகையால், மதிப்புள்ள ஒரு குறுக்கு விகிதத்தில் இடையிரண்டு எழுத்துகளையும் மாற்றினால் கிடைக்கும் குறுக்கு விகிதத்தின் மதிப்பு $= 1 - \lambda$. ——— I

∴ 3 வது வரிசையிலுள்ள,

$$(ACBD) = (BDAC) = (CADB) = (DBCA) = 1 - \lambda.$$

3. 6 வது வரிசையிலுள்ள $(ADCB)$ யை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$(ADCB) = \frac{AD.CB}{AB.CD}$$
$$= \frac{1}{(ABCD)}$$
$$= \frac{1}{\lambda}.$$

$(ADCB)$ என்னும் குறுக்கு விகிதம், $(ABCD)$ என்னும் குறுக்கு விகிதத்திலிருந்து இரண்டாவது, நான்காவது எழுத்துக்களை மாற்றி எழுதியதால் ஆகியது.

ஆகையால் λ மதிப்புள்ள ஒரு குறுக்கு விகிதத்தில் இரண்டாவது எழுத்தையும் நான்காவது எழுத்தையும் மாற்றி எழுதியதால் கிடைக்கும் குறுக்கு விகிதத்தின் மதிப்பு $\frac{1}{\lambda}$ ஆகும். ——II

∴ 6 வது வரிசையிலுள்ள

$$(ADCB) = (BCDA) = (CBAD) = (DABC) = \frac{1}{\lambda}.$$

4. இப்பொழுது $(ACBD)$ என்னும் குறுக்கு விகிதத்தில் இரண்டாவது எழுத்தையும் நான்காவது எழுத்தையும் மாற்றியமைத்தால் $(ADBC)$ என்னும் குறுக்கு விகிதம் கிடைக்கும்.

∴ $(ADBC)$ யின் மதிப்பு $\frac{1}{1-\lambda}$ ஆகும்.

∴ 5 வது வரிசையிலுள்ள

$$(ADBC) = (BCAD) = (CBDA) = (DACB) = \frac{1}{1-\lambda}.$$

5. $(ADCB) = \frac{1}{\lambda}$.

இதில் இடையெழுத்துக்களை மாற்றி யமைத்தால் II இலிருந்து $(ACDB) = 1 - \frac{1}{\lambda}$ என்று தெரியும்.

∴ 4 வது வரிசையிலுள்ள, $(ACDB) = (BDCA) = (CABD) = (DBAC) = 1 - \frac{1}{\lambda}$

$$= \frac{\lambda - 1}{\lambda}.$$

6. $(ACDB) = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$.

இதில் உள்ள இரண்டாவது நான்காவது எழுத்துக்களை மாற்றியமைத்தால் கிடைக்கும் $(ABDC)$ என்னும் குறுக்கு விகிதத்தின் மதிப்பு

$\frac{\lambda - 1}{\lambda}$ ஆகும். ... ... (I-ஐ உபயோகிக்க).

∴ 2 வது வரிசையிலுள்ள

$$(ABDC) = (BACD) = (CDBA) = (DCAB)$$
$$= \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

மேற் கண்டவற்றைத் தொகுத்துக் கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் குறிப்பிட்டுள்ளோம்.

சம குறுக்கு விகிதங்கள்				மதிப்பு
$(ABCD)$	$(BADC)$	$(CDAB)$	$(DCBA)$	λ.
$(ACBD)$	$(BDAC)$	$(CADB)$	$(DBCA)$	$1-\lambda$.
$(ADCB)$	$(BCDA)$	$(CBAD)$	$(DABC)$	$\frac{1}{\lambda}$.
$(ADBC)$	$(BCAD)$	$(CBDA)$	$(DACB)$	$\frac{1}{1-\lambda}$.
$(ACDB)$	$(BDCA)$	$(CABD)$	$(DBAC)$	$1-\frac{1}{\lambda}$.
$(ABDC)$	$(BACD)$	$(CDBA)$	$(DCAB)$	$\frac{\lambda}{\lambda-1}$.

சம இசைப்புள்ளி வரிசைகள்

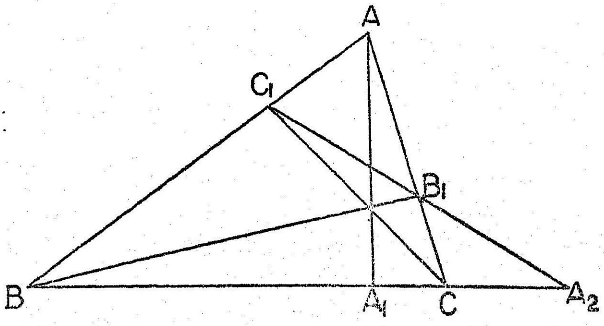
$(ABCD) = -1$ என்றால், மேற்கண்ட அட்டவணையிலிருந்து $(BADC)$ முதலிய 8 குறுக்கு விகிதங்கள் சமம் என்று தெரிகிறது. இதிலிருந்து $(BADC) = -1$ ஆகையால் AC யை B, D ஹார்மோனிக்காகப் பிரித்தால், BD யை A, C ஹார்மோனிக்காகப் பிரிக்கும் என்று தெரிகிறது.

மாதிரி 1

1. ABC என்னும் முக்கோணத்தில் A_1, B_1, C_1 முறையே BC, CA, AB யில் உள்ள புள்ளிகள். AA_1, BB_1, CC_1 ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள். B_1, C_1 என்பன BCயை A_2 என்னும் புள்ளியில் வெட்டுகிறது. (BC, A_1A_2) இசைப்புள்ளி வரிசை என்று நிரூபிக்கவும்.

கொள்கை : (1) AA_1, BB_1, CC_1 ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள்.

(2) C_1B_1, BC யை A_2 வில் சந்திக்கிறது.



படம் 14

நிரூபிக்க : $(BA_1\ CA_2) = -1$ என.

நிரூபணம் :

AA_1, BB_1, CC_1 ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள்.

∴ சீவாவின் தேற்றப்படி (Ceva's Theorem)

$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = +1. \qquad \text{——(1)}$$

இன்னும், C_1B_1 என்னும் கோடு, BC யை A_2 வில் சந்திக்கிறது.

∴ மெனிலாஸ் தேற்றப்படி (Menelaus Theorem)

$$\frac{BA_2}{A_2C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = -1. \qquad \text{——(2)}$$

(1), (2) இந்தச் சமன்பாடுகளில் உள்ள பொது விகிதங்களை நீக்க,

$$\frac{BA_1}{A_1C} = -\frac{BA_2}{A_2C}.$$

(அ-து): A_1, A_2 என்னும் புள்ளிகள் BC யை உட்புறமாகவும், வெளிப்புறமாகவும் ஒரே விகிதத்தில் பிரிக்கின்றன.

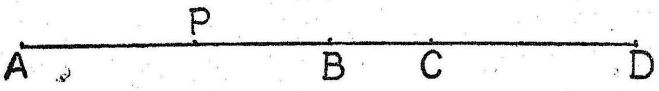
∴ $BA_1\ CA_2$ ஹார்மோனிக் வரிசை அல்லது இசைப்புள்ளி வரிசை.

∴ $(BA_1\ CA_2) = -1.$

மாதிரி 2

$ABCD$ ஒரு இசைப்புள்ளி வரிசை; P அதே நேர்கோட்டில் உள்ள ஒரு புள்ளி.

$$\frac{2\,PC}{AC}=\frac{PB}{AB}+\frac{PD}{AD}$$ என நிரூபிக்கவும்.



படம் 15

கொள்கை : (1) $(ABCD)=-1$.

(2) P என்பது $ABCD$ என்னும் நேர்கோட்டில் ஒரு புள்ளி.

நிரூபிக்க : $\frac{2\,PC}{AC}=\frac{PB}{AB}+\frac{PD}{AD}$ என.

நிரூபணம் : $(ABCD)=-1$.

$$\therefore \quad \frac{2}{AC}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AD}.$$

$$\therefore \quad \frac{2\,PC}{AC}=\frac{PC}{AB}+\frac{PC}{AD}$$

$$=\frac{PB+BC}{AB}+\frac{PD-CD}{AD}$$

$$=\frac{PB}{AB}+\frac{PD}{AD}+\frac{BC}{AB}-\frac{CD}{AD}.$$

$ABCD$ ஒரு இசைப்புள்ளி வரிசை

$$\therefore \quad \frac{AB}{BC}=\frac{AD}{CD}.$$

$$\therefore \quad \frac{BC}{AB}=\frac{CD}{AD}.$$

$$\therefore \quad \frac{BC}{AB}-\frac{CD}{AD}=0$$

$$\therefore \quad \frac{2\,PC}{AC}=\frac{PB}{AB}+\frac{PD}{AD}.$$

பயிற்சி 1 (a)

1. $ABCD$ ஒரு இசைப் புள்ளி வரிசை என்றால் $AC \cdot BD = 2\, AB \cdot CD = 2\, AD \cdot BC$ என்று நிரூபிக்க.

2. குறுக்கு விகிதம $(ABCD) = 2$ என்றால், குறுக்குவிகிதம் $(ABCD) = (ABCD)$ என்று நிரூபிக்க.

3. $(ABCD) = 2$ என்றால், $BDAC$ இசைப்புள்ளி வரிசை என நிரூபிக்க.

4 AD, BE, CE முக்கோணம் ABCயின் குத்துக் கோடுகள். EF, BCயை D_1 இல் சந்திக்கிறது. BC, DD_1 ஹார்மோனிக் வரிசை என நிரூபிகக.

பயிற்சி 1 (b)

1. $\triangle ABC$யில், A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2 முறையே BC, CA, AB என்னும் பக்கங்களை ஹார்மோனிக்காகப் பிரிக்கின்றன.

(a) AA_1, BB_1, CC_1 ஒரு புள்ளிவழிக் கோடுகள் என்றால், A_2, B_2, C_2 ஒரு கோடமைப் புள்ளிகள் என நிரூபிக்கவும்.

(b) A_2, B_2, C_2 ஒரு கோடமைப் புள்ளிகள் என்றால் AA_1, BB_1, CC_1 ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள் என நிரூபிக்கவும்.

2. $\triangle ABC$ யில் AI, AI_2 கோணம் A யை உட்புறமாகவும் வெளிப்புறமாகவும் இரு சமக் கூறிடுகின்றன. AI, AI_2 என்னும் கோடுகள் BCயை D_1, D_2 வில் வெட்டுகின்றன. $(BC, D_1 D_2) = -1$ என நிரூபிக்கவும்.

3. $\triangle ABC$ யின் உள் வட்டம் (Incircle) அதன் பக்கங்கள் BC, CA, ABயை முறையே X, Y, Z இல் தொடுகிறது. YZ பக்கம் BC யை X_1 இல் வெட்டுகிறது. BC, XX_1 இசைப் புள்ளி வரிசை என நிரூபிக்க.

4. A, B, C ஒரு கோடமைந்த மூன்று புள்ளிகள். P ஏதாவது ஒரு புள்ளி.

$$PA^2 \cdot BC + PB^2 \cdot CA + PC^2 \cdot AB + AB \cdot BC \cdot BA = 0$$

எனக் காட்டுக.

5. $OABC$ ஒரு புள்ளி வரிசை.

$$OA \cdot OB \cdot AB + OB \cdot OC \cdot BC + OC \cdot OA \cdot CA = AB \cdot BC \cdot CA$$

என நிரூபிக்க.

6. $ABCD$ என்னும் நேர்கோட்டில் X, Y இரண்டு புள்ளிகள்.

$$\frac{(ABXY) \cdot (CDXY)}{(ADXY) \cdot (CBXY)} = (ABCD)$$

என நிரூபிக்கவும்.

7. (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) என்பவை $X = ax + b$ என்னும் ஒரு கோடமைந்த A, B, C, D என்னும் புள்ளிகள். A_x, B_x, C_x, D_x ; A_y, B_y, C_y, D_y என்பன X அச்சு, Y அச்சு இவற்றின் மேல் மேற்கண்ட புள்ளிகளின் வீழ்ச்சிகள் (Projections).

$$(A_x B_x C_x D_x) = (A_y B_y C_y D_y)$$
$$= (ABCD)$$ என நிரூபிக்கவும்.

8. $\triangle ABC$ யின் தளத்தில் (Plane) P, Q என்பவை இரண்டு புள்ளிகள். AP, BP, CP ; AQ, BQ, CQ முறையே BC, CA, AB யை A_1, B_1, C_1 ; A_2, B_2, C_2 இவற்றில் சந்திக்கின்றன.

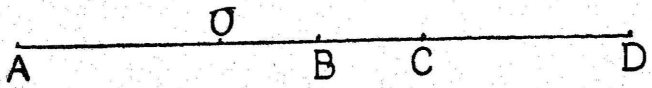
$(BA_1\ CA_2) \cdot (CB_1\ AB_2) \cdot (AC_1 BC_2) = 1$ என நிரூபிக்கவும்.

9. $ax^2 + 2hx + b = 0$, $px^2 + 2q^x + r = 0$ என்னும் வரைபடங்கள் (Graphs) X அச்சை முறையே X_1, X_2, ; X_3, X_4 என்னும் புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன. $X_1 X_2 X_3 X_4$ ஒரு ஹார்மோனிக் வரிசை என்றால், $ap + br = 2hg$ என நிரூபிக்க.

10. $O\,(AB, CD) = -1$ ஆனால்,
$2 \cot AOB = \cot AOC + \cot AOD$ என நிரூபிக்கவும்.

தேற்றம் 3

$ABCD$ என்னும் ஹார்மோனிக் வரிசையில் O, AC யின் நடுப்புள்ளியானால், $OB \cdot OD = OA^2 = OC^2$.



படம் 16

கொள்கை : (1) $ABCD$ ஒரு ஹார்மோனிக் வரிசை.
(2) O, AC யின் நடுப்புள்ளி.

நிரூபிக்க : $OB \cdot OD = OA^2 = OC^2$ என.

நிருபணம் : $(ABCD) = -1$.

$$\therefore \quad \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}.$$

$$\therefore \quad \frac{AB+BC}{AB-BC} = \frac{AD+CD}{AD-CD} \quad \left[\begin{array}{c}\text{கூட்டல் கழித்தல் விகித சமம்} \\ \text{Componendo, dividendo}\end{array}\right]$$

$$AB+BC = AC = 2\,OC.$$

$$AB-BC = (AO+OB) - (OC-OB)$$
$$= 2\,OB.$$

$$AD+CD = AC+CD+CD$$
$$= 2\,OC+2\,CD$$
$$= 2\,OD.$$

$$AD-CD = AC$$
$$= 2\,OC.$$

$$\therefore \quad \frac{2\,OC}{2\,OB} = \frac{2\,OD}{2\,OC}.$$

$$\therefore \quad OB \cdot OD = OC^2.$$
$$= OA^2.$$

(நி. வே.)

மறுதலைத் தேற்றம்

$ABCD$ என்னும் புள்ளி வரிசையில் O, AC யின் நடுப்புள்ளி. $OB \cdot OD = OC^2$ என்றால் $ABCD$ இசைப்புள்ளி வரிசை ஆகும்.

குறிப்பு: படம் 6 பார்க்கவும்.

கொள்கை: $ABCD$ என்னும் புள்ளிவரிசையில்
(1) O, AC யின் நடுப்புள்ளி.
(2) $OB \cdot OD = OC^2$.

நிருபிக்க: $(ABCD) = -1$ என,

நிருபணம்:

$$OC^2 = OB \cdot OD$$

$$\therefore \quad \frac{OC}{OB} = \frac{OD}{OC}$$

$$\therefore \quad \frac{OC+OB}{OC-OB} = \frac{OD+OC}{OD-OC} \quad \left[\begin{array}{c}\text{கூட்டல் கழித்தல்} \\ \text{விகித சமம்} \\ \text{Componendo} \\ \text{Dividendo}\end{array}\right]$$

$$OC+OB = AO+OB \quad (O,\ AC\text{யின் நடுப்புள்ளி})$$
$$= AB.$$

$$OC - OB = BC.$$
$$OC + OD = AO + OD$$
$$= AD.$$
$$OD - OC = CD.$$
$$\therefore \quad \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$$
$$\therefore \quad \frac{AB \cdot CD}{AD \cdot BC} = 1.$$
$$\therefore \quad \frac{AB \cdot CD}{AD \cdot CB} = -1.$$
(அ–து) $(ABCD) = -1.$

குறிப்பு: இத்தேற்றத்தைக் கொண்டு B, D என்னும் புள்ளிகள் A, O, C இவற்றோடு எவ்வாறு சம்பந்தப்பட்டுள்ளன என அறியலாம்.

1. $OB \cdot OD = OC^2$. OC^2 பாஸிடிவ் ஆனபடியால் B, D இரண்டும் O வின் ஒரே பக்கத்திலுள்ளவை.

2. $OB \cdot OD = OC^2$. AC கொடுக்கப்பட்ட கோடானதால் OC^2 நிலையானது. ஆகவே B, O வை நெருங்கி வரும்போது D அதிலிருந்து தூரமாக நகரும்.

3. OB, ODக்கு OC பெருக்கு சராசரி (Geometric mean).

4. $OB \cdot OD = OC^2$ ஆனதால், $B \cdot D$ வழியே செல்லும் வட்டங்களுக்கு OC என்பது O விலிருந்து தொடுகோட்டின் நீளம் ஆகும்.

5. ACயை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் வரைந்தால் அதன் ஆரம், B, D வழிச்செல்லும் எந்த வட்டத்துக்கும் வரையும் தொடுகோட்டுக்குச் சமம்.

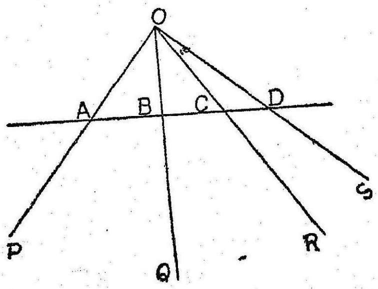
6. B, O உடன் பொருந்தும்போது, எட்டாப் புள்ளி (Point at infinity) ஆகிறது. ஆகையால் O வின் இசைத்துணைப் புள்ளி (Harmonic Conjugate) எட்டாப்புள்ளி ஆகும்.

$(AOCD) = -1.$

7. இசைப்புள்ளி வரிசையில் ஒரு புள்ளி எட்டாப் புள்ளி ஆனால், மற்றொரு புள்ளி கோட்டின் மையப் புள்ளி ஆகும்.

தேற்றம் 4

நான்கு கோடுகள் கொண்ட ஒரு கோட்டுக் கற்றையை ஒரு குறுக்கு வெட்டி வெட்டும்போது ஏற்படும் புள்ளி வரிசையின் குறுக்கு விகிதம் கோட்டுக்கற்றையின் குறுக்கு விகிதத்துக்குச் சமம்.



படம் 17

கொள்கை: (1) $O\,(P, Q, R, S)$ ஒரு கோட்டுக் கற்றை.

(2) ஒரு குறுக்கு வெட்டி, இதை $(ABCD)$ என்னும் புள்ளி வரிசையில் வெட்டுகிறது.

நிரூபிக்க: $(ABCD) = O\,(PQRS)$ என.

நிரூபணம்:

$$(ABCD) = \frac{AB \cdot CD}{AD \cdot CB}$$

$$= \frac{\triangle\, AOB \cdot \triangle\, COD}{\triangle\, AOD \cdot \triangle\, COD}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}OA \cdot OB \sin AOB \cdot \frac{1}{2}\, OC \cdot OD \sin COD}{\frac{1}{2}OA \cdot OD \sin AOD \cdot \frac{1}{2}\, OC \cdot OB \sin COB}$$

$$= \frac{\sin AOB \cdot \sin COD}{\sin AOD \cdot \sin COB}$$

$$= \frac{\sin POQ \cdot \sin ROS}{\sin POS \cdot \sin ROQ}$$

$$= O\,(PQRS).$$ (நி. வே.)

குறிப்பு: 4 கோடுகள் கொண்ட ஒரு கோட்டுக் கற்றையை இரண்டு குறுக்கு வெட்டிகள் வெட்டினால் ஏற்படும் புள்ளி வரிசைகளின் குறுக்கு விகிதங்கள் சமம்.

(அ-து) (P, Q, R, S) என்னும் கோட்டுக் கற்றையை இரண்டு குறுக்கு வெட்டிகள் $ABCD$, $A' B' C' D'$ என்னும் புள்ளி வரிசைகளில் வெட்டினால்,

$$(A\,B\,C\,D) = (A'\,B'\,C'\,D')$$

கிளைத் தேற்றம்

1. 4 நேர்கோடுகள் கொண்ட ஒரு கோட்டுக் கற்றையை எத்தனை குறுக்கு வெட்டிகள் வெட்டினாலும் அவற்றால் ஏற்படும் புள்ளி வரிசையின் குறுக்கு விகிதங்கள் சமம்.

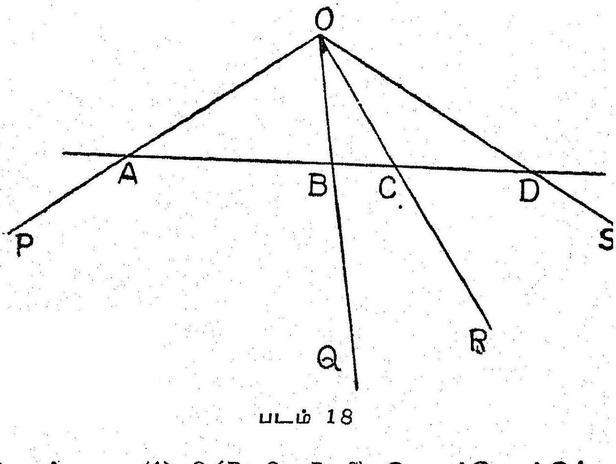
மறுதலை

ஒருகோடமைந்த நான்கு புள்ளிகளை அக்கோட்டிலில்லாத மற்றொரு புள்ளியுடன் சேர்த்தால் உண்டாகும் கோட்டுக் கற்றையின் குறுக்கு விகிதம் அப்புள்ளி வரிசையின் குறுக்கு விகிதத்துக்குச் சமம்.

இதன் நிரூபணத்தை மாணவர்களே முயற்சிக்கலாம். தேற்றத்தின் படிகளைக் கீழிருந்து மேலே திருப்பிச் செய்ய வேண்டும்.

தேற்றம் 5

ஒரு இசைக் கோட்டுக் கற்றையை ஒவ்வொரு குறுக்கு வெட்டியும் இசைப்புள்ளி வரிசையில் வெட்டும்.



படம் 18

கொள்கை: (1) $O\,(P, Q, R, S)$ இசைக்கோட்டுக் க

(2) ஒரு குறுக்கு வெட்டி அதன் கத்

A, B, C, D யில் வெட்டுகிறது.

நிருபிக்க: *ABCD* இசைப்புள்ளி வரிசை என.

நிருபணம்:

$O(P, Q, R, S)$ என்னும் கோட்டுக் கற்றையை *ABCD* வெட்டுவதால்

$(ABCD) = O(PQRS)$ (தேற்றம் 4)

ஆனல் $O(PQRS) = -1$ (கொள்கை)

$$\therefore \quad (ABCD) = -1.$$

மாற்று நிருபணம் (தேற்றம் 4ஐ உபயோகிக்காமல்)

$$O(PQRS) = -1.$$

$$\frac{\sin POQ \cdot \sin ROS}{\sin POS \cdot \sin ROQ} = -1.$$

$$(ABCD) = \frac{AB \cdot CD}{AD \cdot CB}$$

$$= \frac{\triangle AOB \cdot \triangle COD}{\triangle AOD \cdot \triangle COB}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\, OA \cdot OB.\ \sin AOB \cdot \frac{1}{2}\, OC \cdot BD \sin COD}{\frac{1}{2}\, OA \cdot OD.\ \sin AOD \cdot \frac{1}{2}\, OC \cdot OB \sin COB}$$

$$= \frac{\sin AOB \cdot \sin COD}{\sin AOD \cdot \sin COB}$$

$= -1.$ (கொள்கை)

$$\therefore (ABCD) = -1$$

மறுதலை 1.

நான்கு கோடுகளைக் கொண்ட ஒரு கோட்டுக் கற்றையை ஒரு குறுக்குவெட்டி இசைப்புள்ளி வரிசையில் வெட்டினல், அது இசைக் கோட்டுக் கற்றையாகும். மற்றக் குறுக்கு வெட்டிகளையும் அது இசைப்புள்ளி வரிசையில் வெட்டும்.

கொள்கை :

(1) $O(P, Q, R, S)$ ஒரு கோட்டுக் கற்றை.

(2) *ABCD* என்னும் புள்ளி வரிசையில் ஒரு குறுக்கு வெட்டி வெட்டுகிறது.

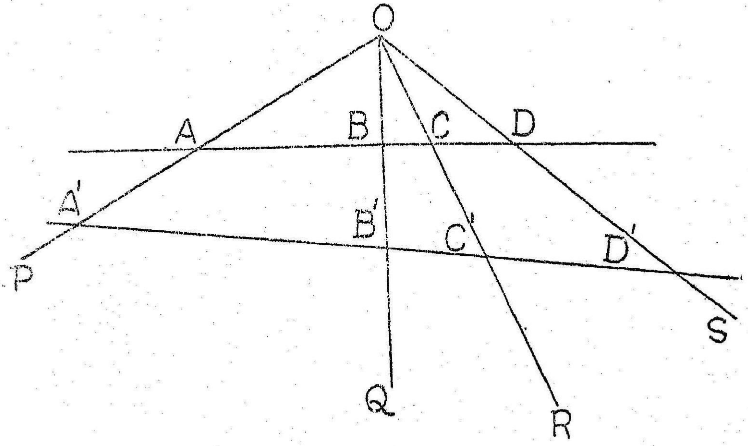
(3) *ABCD* இசைப்புள்ளி வரிசை.

(4) *A'B'C'D'* மற்ருெரு குறுக்கு வெட்டி.

நிருபிக்க : $O(PQRS) = -1$ என.

நிருபணம் :

(1) $O(P, Q, R, S)$ என்னும் கோட்டுக் கற்றையை $ABCD$ என்னும் குறுக்கு வெட்டி, $ABCD$ என்னும் புள்ளி வரிசையில் வெட்டுகிறது.



படம் 19

$\therefore \quad O(PQRS) = (ABCD).$ (தேற்றம் 4)

ஆனால் $(ABCD) = -1$ (கொள்கை)

$\therefore \quad O\ (PQRS) = -1.$

(2) $O\ (P, Q, R, S)$ என்னும் கோட்டுக் கற்றையை $A'B'C'D'$ என்னும் கோடு வெட்டுவதால் $(A'B'C'D')$ $= O\ (PQRS).$
$= -1.$

குறிப்பு

மறுதலைத் தேற்றத்தை மற்றொரு விதமாகவும் சொல்லலாம். அதுவும் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

மறுதலை 2

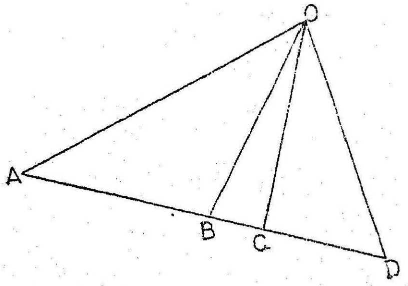
ஒரு இசைப்புள்ளி வரிசையிலுள்ள புள்ளிகளை அக்கோட்டிலில்லாத வேறு ஒரு புள்ளியுடன் இணைத்தால் கிடைக்கும் கோட்டுக் கற்றை இசைக் கோட்டுக் கற்றையாகும்.

கொள்கை :

(1) *ABCD* இசைப்புள்ளி வரிசை.

(2) *O* என்பது அதற்கு வெளியே ஒரு புள்ளி.

(3) *O* வுடன் *A*,*B*,*C*,*D* யை இணைத்திருக்கிறது.



படம் 20

நிரூபிக்க :

$O\ (ABCD) = -1$ என.

நிரூபணம் : $O\ (A,B,C,D)$ என்னும் கோட்டுக் கற்றையை *ABCD* வெட்டுவதாகக் கொள்வோம்.

$O\ (ABCD) = (ABCD)$. (தேற்றம் 4)

ஆனால் $(ABCD) = -1$ (கொள்கை)

$\therefore\ O\ (ABCD) = -1$.

கிளைத் தேற்றம்

ஒரு இசைக் கோட்டுக் கற்றையை, வெட்டும் குறுக்கு வெட்டி அதில் ஒரு கதிருக்கு (Ray) இணையானால், அந்தக் குறுக்கு வெட்டியில் மற்ற 3 கதிர்கள் வெட்டும் இரண்டு துண்டுகளும் சமம் (படம் 21).

நிரூபணம் : *ABC*, *OS* க்கு இணை.

$\therefore$ *ABC*, *OS* ஐ *D* யில் வெட்டட்டும்.

$O\ (P,Q,R,S))$ ஐ *ABC* வெட்டுகிறது.

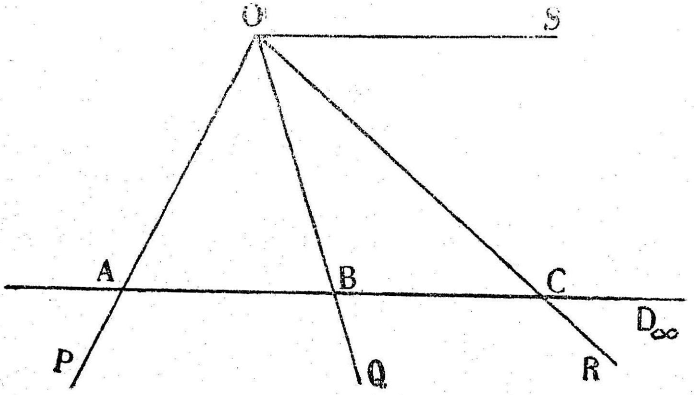
$\therefore (ABCD) = O\ (PQRS)$

$= -1$.

$\therefore\ AB = BC$. (தேற்றம் 3இல் குறிப்பு 7)

மறுதலை :

OA, OB, OC ஒரு நேர்கோட்டை இரு சமக்கூறிட்டால், OD, அந்தக் கோட்டுக்கு இணையானால், $O\,(A, B, C, D)$ ஹார்மோனிக் கோட்டுக் கற்றை ஆகும்.



படம் 21

நிருபணம் : $AB = BC$:

$$\therefore\ (ABCD\infty) = -1.$$

$$\therefore\ O\,(ABCD\infty) = -1.$$

(அ-து) $O\ (PQRS) = -1.$

சில இசைக் கோட்டுக் கற்றைகள்

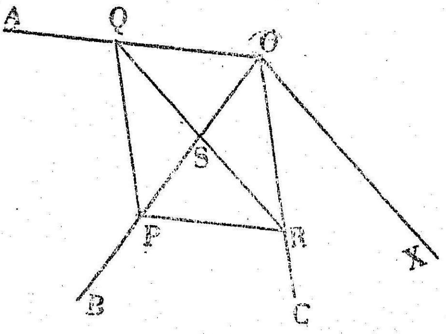
1. $\triangle\ ABC$ யில் A' என்பது BC யின் நடுப்புள்ளி. BC க்கு இணையாக AD வரைந்தால், $A\,(B, A', C, D)$ இசைக் கோட்டுக் கற்யையாகும்.

   இதிலிருந்து ஒரு முக்கோணத்தில் $A\,A'$ இன் இசைத் துணைக்கோடு வரைய ஒரு முறை அறியலாம்.

2. $ABCD$ ஒரு இணைகரம். AC, BD என்பன D வில் வெட்டுகின்றன. A யின் வழியாக BD க்கு AE இணையாக வரைந்தால், $A\,(D, O, B, E)$ இசைக் கோட்டுக் கற்றையாகும். அதே போல C, B, D வழியாகக் கோடுகள் வரைந்து இசைக் கோட்டுக் கற்றைகளின் பெயர்களை எழுதுக.

   இதிலிருந்து ஏதாவது 3 கோடுகள் கொடுத்தால் 4 வது இசைக் கோடு கண்டு பிடிக்க ஒரு முறை கிடைக்கிறது.

3. ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லும் 3 கோடுகளுக்கு 4 வது இசைக் கோடு வரைய



படம் 22

கொள்கை: *OA*, *OB*, *CO* மூன்று கோடுகள்.

வரைதல்: 4 வது இசைக்கோடு வரைய.

முறை: *OB* யில் *P* என்னும் ஏதாவது ஒரு புள்ளி குறிக்கவும்.

P வழியாக *OC*, *OA* க்கு இணைகோடுகள் வரைக.

அவை *OA*, *OC* யை *Q*, *R* இல் வெட்டும்.

QR ஐச் சேர்க்கவும்.

O வழியாக *QR* க்கு *OX* என்னும் இணைகோடு வரைக.

OX தான் கேட்கப் பட்ட கோடு.

நிரூபணம்: வரைதல் படி *OQPR* இணைகரம்.

QR, *OP* மூலைவிட்டங்கள் *S* இல் வெட்டுகின்றன.

$\therefore$ $QS = SR$.

OX, *QR* க்கு இணை.

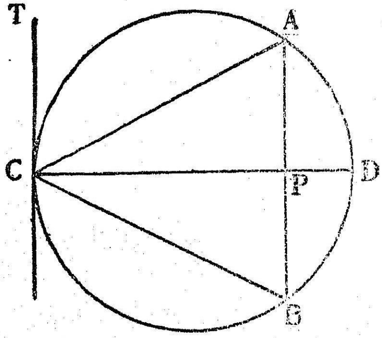
$\therefore$ $O\ (QSRX)$ இசைக் கோட்டுக் கற்றை.

$\therefore$ $O\ (ABCX)$ இசைக் கோட்டுக் கற்றை.

4. விட்டம் *CD* க்கு *AB* செங்குத்து நாண். *CA*, *CD*, *CB* க்கு 4 வது இசைக் கோடு வரைய.

CD ஒரு வட்டத்தின் விட்டம். *AB* அதற்குச் செங்குத்தாக உள்ள ஒரு நாண்.

CA, CD, CB இவற்றுக்கு 4 வது இசைக்கோடு C யில் விட்டத்துக்கு வரையப்படும் தொடுகோடு ஆகும்.



படம் 23

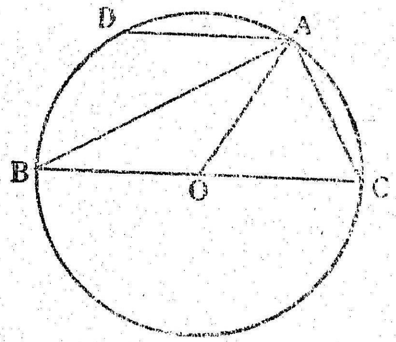
நிருபணம் : $AP = PB$.

மேலும் CT, AB க்கு இணைகோடு.

(இரண்டும் CD க்குச் செங்குத்துக் கோடுகள்)

$\therefore$ $C(B, D, A, T)$ இசைக் கோட்டுக் கற்றை.

$\therefore$ CB, CD, CA க்கு 4 வது இசைக்கோடு CT.



படம் 24

O மையமாகவுள்ள ஒரு வட்டத்தில் BC ஒரு விட்டம். A அதன் மேல் ஒரு புள்ளி. AB, AD, AC க்கு 4 வது இசைக் கோடு A வழியே BC க்கு இணையாக வரையப்பட்ட கோடு.

நிருபணம் : $BO = OC$

AD, BC க்கு இணை.

$\therefore$ $A(D, B, O, C)$ இசைக்கோட்டுக் கற்றை

மாதிரிகள்

1. A, B, C, D ஒரு கோடமைப் புள்ளிகள். O, O_1, AB, CD யின் மையப்புள்ளிகள். A, B, C, D ஹார்மோனிக் புள்ளி வரிசை என்றால்,

$$4OO_1^2 = AB^2 + CD^2$$ என நிருபிக்கவும்.

படம் 25

நிருபணம் :

AB, CD ஹார்மோனிக் வரிசை

O, AB யின் நடுப்புள்ளி.

$\therefore$ $OB^2 = OC\ OD.$ (தேற்றம் 3)

$= (OO_1 - CO_1)(OO_1 + O_1D)$

$= (OO_1 - CO_1)(OO_1 + CO_1)$ (O_1, CD யின் நடுப்புள்ளி)

$= OO_1^2 - CO_1^2$

$OO_1^2 = CO_1^2 + OB^2$

$\therefore$ $4OO_1^2 = 4CO_1^2 + 4OB^2$

$= CD^2 + AB^2.$ ($\because$ O, O_1 AB, CD யின் நடுப்புள்ளிகள்)

2. ஒரு இசைக்கோட்டுக் கற்றையை அவற்றில் ஒரு கதிருக்கு இணையான ஒரு குறுக்கு வெட்டி A, B, C எனும் புள்ளிகளில் சந்தித்தால் $AB = BC$ என்று எட்டாப்புள்ளியை உபயோகிக்காமல் நிருபிக்க.

கொள்கை : (1) (A, B, C, F) இசைக்கோட்டுக் கற்றை

(2) ABC, OF க்கு இணை

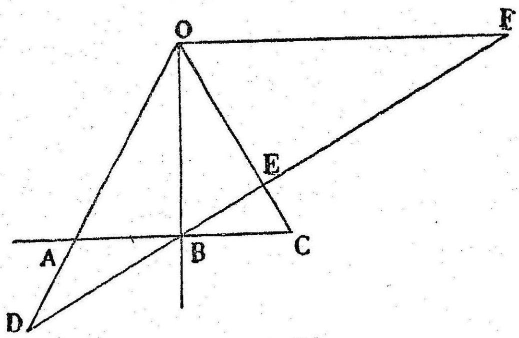
நிருபிக்க : $AB = BC$ என.

நிருபணம் : B வழியே, இசைக்கோட்டுக் கற்றையை $DBEF$ என்னும் புள்ளி வரிசையில் வெட்டும்படி ஒரு குறுக்கு வெட்டி வரைக.

$\triangle ODF$ இல், AB, OFக்கு இணை.

$$\frac{DB}{DF}=\frac{AB}{OF} \qquad \text{——(1)}$$

$\triangle BCE$, $\triangle OEF$ இல் BC, OFக்கு இணை.



படம் 26

$\therefore \quad \angle EBC = \angle EFO.$ (மாற்றுக் கோணங்கள்)

$\angle ECB = \angle EOF$ (,,)

$\therefore \quad \triangle BCE \;|||\; \triangle OEF.$

$$\therefore \quad \frac{BE}{EF}=\frac{BC}{OF}. \qquad \text{——(2)}$$

$O(DBEF)$ இசைக் கோட்டுக் கற்றை ;

$DBEF$ ஒரு குறுக்கு வெட்டி.

$\therefore \quad (DBEF) = -1.$ (தேற்றம் 5)

$$\therefore \quad \frac{DB}{BE}=\frac{DF}{EF}.$$

$$\therefore \quad \frac{DB}{DF}=\frac{BE}{EF}.$$

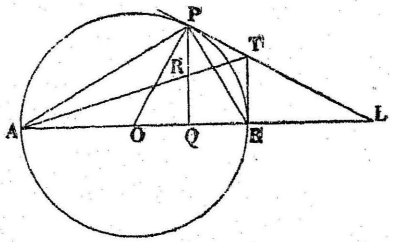
$\therefore$ (1), (2) இலிருந்து

$$\frac{AB}{OF}=\frac{BC}{OF}.$$

$\therefore \quad AB = BC.$

8. ஒரு வட்டத்தில் AB ஒரு விட்டம். P வட்டத்தின் மேல் ஒரு புள்ளி. PQ, ABக்குக் குத்துக்கோடு. P, B யில் வட்டத்துக்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகள் Tயில் சந்திக்கின்றன. AT, PQவை இரு சமக்கூறிடுகிறது என நிரூபிக்கவும்.

கொள்கை : (1) AB வட்டத்தின் விட்டம்.
(2) P வட்டத்தின் மேல் ஒரு புள்ளி.
(3) $PQ \perp AB$.
(4) PT, BT தொடுகோடுகள்.



படம் 27

நிருபிக்க : PQ, AT யை R இல் வெட்டட்டும்.
$PR = RQ$.

நிருபணம் : (1) PT, AB யை L இல் சந்திக்கட்டும்.
(2) TQ வைச் சேர்க்க.
(3) வட்டத்தின் மையம் O என்போம்.
(4) OP யைச் சேர்க்க.

$\triangle OPL$ இல் $\angle OPL = 90°$; மேலும் $PQ \perp OL$

$\therefore \quad OP^2 = OQ . OL$.

ஆனால் $OP = OB$ (வட்டத்தின் ஆரங்கள்)

$\therefore \quad OB^2 = OQ . OL$

$\therefore \quad (AB, QL) = -1$. (தேற்றம் 3)

$\therefore \quad T(AB, QL) = -1$. (தேற்றம் 5)

$\angle PQL = 90°$ (கொள்கை)

BT, B யில் தொடுகோடு.

$\therefore \quad \angle TBL = 90°$

$\therefore \quad PQ$, TB இணைகோடுகள்

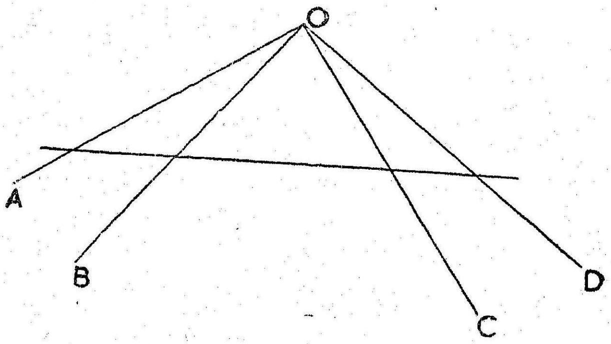
மேலும் PQ என்னும் குறுக்கு வெட்டி $T(A, Q, B, L)$ என்னும் இசைக்கோட்டுக் கற்றையை R, Q, P யில் வெட்டுகின்றது.

$\therefore \quad PR = RQ$.

பயிற்சி 2 (a)

படம் 28

1. மேற்கண்ட படத்தில் O, AC யின் நடுப்புள்ளி. $ABCD$ இசைப்புள்ளி வரிசையாக இருக்க முடியுமா? காரணம் கூறுக.



படம் 29

2. மேற்கண்ட படத்தில், $O(A, B, C, D)$ ஒரு இசைக் கோட்டுக் கற்றையாக இருக்கமுடியுமா ? காரணம் கூறுக.

3. $\triangle ABC$ யில் CE என்பது AB க்கு இணையாக வரையப் படுகிறது. C_1 என்பது AB யின் நடுப்பள்ளி என்றால் C $(B, C_1$ $A, E)$ ஹார்மோனிக் கற்றை என நிரூபிக்கவும்.

4. $ABCD$ என்னும் இணைகரத்தில் O மையப்புள்ளி. E, F முறையே AB, BC இவற்றின் மையப்புள்ளிகள். $O(A, E, B, F)$ ஹார்மோனிக் கற்றை என நிரூபிக்கவும்.

5. AB ஒரு வட்டத்தின் விட்டம். P என்பது வட்டத்தின் மேல் ஒரு புள்ளி. P யிலிருந்து AB க்கு வரையப்படும் குத்துக்கோடு PQ. PT, P யில் வட்டத்துக்கு வரையப்படும் தொடுகோடு.

$P(A, Q, B, T)$ இசைக் கோட்டுக் கற்றை என நிரூபிக்க.

பயிற்சி 2 (b)

1. $ABCD$ இசைப்புள்ளி வரிசை. O, BD யின் நடுப் புள்ளி. $AB \cdot AD = AC \cdot AO$ என நிரூபிக்க.

2. P, Q என்பன AB யை ஹார்மோனிக்காகப் பிரிக்கின்றன. O, AB யின் மையப்புள்ளி.

$$AP \cdot PB = OP \cdot PQ$$
$$AQ \cdot QB = OQ \cdot PQ$$

என நிரூபிக்க.

3. $ABCD$ ஒரு செவ்வகம். AC, BD யை, முறையே P, Q, R, S இசையாகப் பிரிக்கின்றன. $PQRS$ ஒரு வட்ட நாற்கரம் என நிரூபிக்க.

4. 3 வட்டங்கள் A, B வழியே செல்கின்றன. TT என்னும் பொதுத் தொடுகோடு, 2 வட்டங்களை T, T' என்னும் புள்ளிகளில் தொடுகிறது. அது மூன்றுவது வட்டத்தை P, Q என்னும் புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. $(TT', PQ) = -1$ என நிரூபிக்க.

5. $ABCD$ என்னும் சரிவகத்தில் (Trapezium) AB, CD இணைப்பக்கங்கள். AC, BD என்பன Q விலும், AD, BC என்பன P யிலும் சந்திக்கின்றன. PQ வை AB, CD இசையாகப் பிரிக்கின்றன என நிரூபிக்க.

6. $\triangle ABC$ யில் AD, BE, CF குத்துக் கோடுகள். EF, BC ஐ D_1 இல் சந்திக்கிறது. A^1 என்பது BC யின் மையப்புள்ளி.

$A' B^2 = A'D \cdot A'D'$ என நிரூபிக்க.

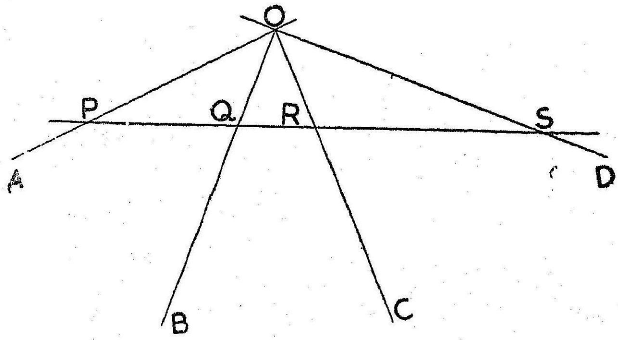
7. ஒரு வட்டத்தில் AB ஒரு விட்டம். P வட்டத்தின் மேல் ஒரு புள்ளி. P யில் வரையப்படும் தொடுகோடு AB யை T யில் வெட்டுகிறது. PM, P யிலிருந்து AB க்கு வரையப்பட்ட குத்துக்கோடு. AQ, A யிலிருந்து PI க்கு இணையாகவும் PM ஐ Q வில் சந்திக்கும்படியும் வரையப்பட்ட கோடு. BQ, PT யை இரு சமக் கூறுருக்கிறது என நிரூபிக்கவும்.

தேற்றம் 6

ஒரு கோணத்தின் இருபுயங்களும் அதன் உட்புற, வெளிப்புற இருசம வெட்டிகளும் ஒரு இசைக்கோட்டுக் கற்றையாகும்.

கொள்கை : (1) $\angle AOC$ ஒரு கோணம்.

(2) OB, OD என்பன $\angle AOC$ யின் இரு சம வெட்டிகள்.



படம் 30

நிரூபிக்க : $O(A, B, C, D)$ இசைக் கோட்டுக் கற்றை.

நிரூபணம் : $PQRS$ என்னும் கோடு, $O(A, B, C, D)$ என்னும் கோட்டுக் கற்றையை $PQRS$ என்னும் புள்ளி வரிசையில் வெட்டட்டும்.

OQ, $\angle POQ$ ஐ இரு சமக்கூறிடுவதால்

$$\angle POQ = \angle QOR.$$

$$\therefore \quad \frac{OP}{OR} = \frac{PQ}{QR}.$$

அதேபோல், OS என்பது வெளிக் கோணம் POR ஐ இருசமக் கூறிடுவதால்

$$\therefore \quad \frac{OP}{OR} = \frac{PS}{RS}.$$

$$\therefore \quad \frac{PQ}{QR} = \frac{PS}{RS}.$$

$$\therefore \quad \frac{PQ}{QR} = -\frac{PS}{SR}.$$

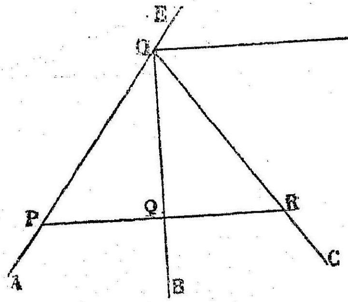
$\therefore \quad (PQRS) = -1.$

$\therefore \quad O(PQRS) = -1.$ (தேற்றம் 5)

$\therefore \quad O(ABCD) = -1.$

(அ-து) $O(A, B, C, D)$ இசைக்கோட்டுக் கற்றை.

மறுதலை : ஒரு இசைக்கோட்டுக் கற்றையில், ஒரு ஜதை இசைத் துணைக்கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருந்தால், அவை மற்ற ஜதைக் கோடுகளின் இடையே உள்ள கோணத்தை உட்புறமாகவும் வெளிப்புறமாகவும் இருசமக் கூறிடும் கோடுகளாகும்.



ம் 31

கொள்கை : (1) $O(ABCD) = -1$.
(2) $\angle BOD = 90°$.

நிரூபிக்க : (1) $\angle AOB = \angle BOC$.
(2) $\angle COD = \angle DOE$ (AO வை Eக்கு நீட்டியிருக்கிறது).

நிருபணம் :

OD க்கு இணையாக PQR என்னும் குறுக்கு வெட்டி வரைக. அது OA, OB, OC யை முறையே P, Q, R என்னும் புள்ளிகளில் வெட்டட்டும்.

PQR, OD க்கு இணை.

$\therefore$ (1) $PQR \perp OQ$.

$\therefore$ $\angle QOD = 90°$ (கொள்கை)

(2) $O(ABCD) = -1$.

மேலும் PRQ, OD க்கு இணை. (தேற்றம் 5)

$\therefore$ $PQ = QR$. (கிளை 1)

$\triangle POQ$, $\triangle QOR$ இல்

$PQ = QR$

OQ பொது

$\angle PQO = \angle OQR = 90°$.

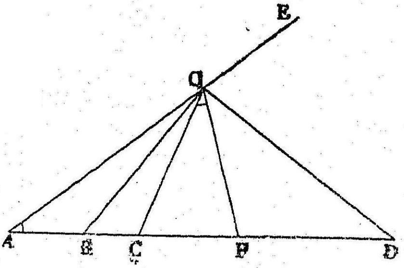
$\triangle POQ = \triangle QOR$

$\therefore \angle POQ = \angle QOR$. (1)

மேலும் $OD \perp OQ$. $\therefore$ OD, கோணம் POR இன் வெளிப்புற இருசம வெட்டி.

$\therefore \angle ROD = \angle DOE$. (2)

மாற்று நிருபணம் :



படம் 32

கொள்கை : (1) $O\,(ABCD) = -1$.

(2) $\angle BOD = 90°$.

நிருபிக்க : (1) $\angle AOB = \angle BOC$.

(2) $\angle COD = \angle DOE$ (AO வை E க்கு நீட்டியிருக்கிறது).

நிருபணம் :

BD யின் நடுப்புள்ளி P ஆகட்டும்.

$(\perp ABCD) = -1$. (கொள்கை)

$\therefore (ABCD) = -1$.

P, BD யின் நடுப்புள்ளி.

$\therefore PB^2 = PC \cdot PA$. (தேற்றம் 3)

$\triangle BOD$ யில் $\angle BOD = 90°$. (கொள்கை)

$\therefore PO = BP = PD$.

$\therefore PO^2 = PC \cdot PA$.

$\therefore PO$, ACO என்னும் வட்டத்தைத் தொடுகிறது.

$\therefore \angle POC =$ மாற்று வட்டப் பகுதியிலுள்ள $\angle PAO$. ——(1)

மேலும் $\because PO = PB$

$\angle POB = \angle PBO$. ——(2)

$\therefore$ (2)—(1) $\angle BOC = \angle AOB$ ($\because \triangle AOB$ யில் $\angle PBO$ வெளிக்கோணம்)

மேலும் $OD \perp OB$.

$\therefore$ OD, $\angle AOC$ யின் வெளிப்புற இருசம வெட்டி.

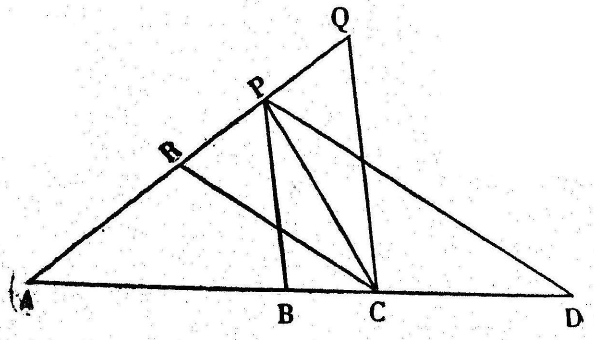
$\angle COD = \angle DOE$.

கிளைத்தேற்றம்:

$ABCD$ ஹார்மோனிக் வரிசையானல், BD விட்டமாக வுடைய வட்டத்தின் மேல் O ஒரு புள்ளியானல், $\frac{OA}{OC}$ நிலையானது; அது $\frac{AB}{BC}$ க்குச் சமம்.

மூன்று புள்ளிகள் கொடுத்தால் நான்காவது ஹார்மோனிக் புள்ளி கண்டுபிடிக்க.

ஒரு நேர்கோட்டில் உள்ள A, B, C என்னும் 3 புள்ளிகள் கொடுத்திருந்தால் $ABCD$ ஹார்மோனிக்காக இருக்கும்படி D என்னும் புள்ளியைக் கண்டுபிடிக்க.



படம் 33

கொடுக்கப்பட்டது: A, B, C என்னும் ஒரு கோடமை புள்ளிகள்.

கேட்கப்பட்டது: D என்னும் புள்ளியைக் கண்டுபிடிக்க.

வரைமுறை:

(1) A வழியே ஏதேனும் ஒரு கோடு வரைந்து அதில் P என்னும் புள்ளியைக் குறிக்க.

(2) PC யையும் PB யையும் சேர்க்க.

(3) PB க்கு இணையாக CQ வரைக. அது AP யை Q யில் வெட்டப்படும்.

(4) $PR = PQ$ இருக்கும்படி AP யில் R என்னும் புள்ளியைக் குறிக்க.

(5) CR ஐச் சேர்க்க.

(6) P வழியே RC க்கு இணையாக ஒரு நேர் கோடு வரைக.

(7) அது ABC யை D யில் வெட்டப்படும். D தான் கேட்கப்பட்ட புள்ளி.

நிருபணம்:

$PB \parallel QC$.

$\therefore \triangle ACQ$ வில்

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AP}{PQ}.$$

$PQ = PR$. (வரைதல்படி)

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{AP}{RP}.$$

$\triangle APD$ யில்,

$CR \parallel DP$.

$$\therefore \frac{AD}{CD} = \frac{AP}{RP}.$$

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}.$$

$$\therefore (ABCD) = -1.$$

மாதிரிகள்:

1. A, B, C, D ஒரு கோடமை புள்ளிகள். AD, BC இவை இரண்டையும் ஹார்மோனிக்காகப் பிரிக்கும் இரண்டு புள்ளிகளைக் கண்டுபிடிக்க.

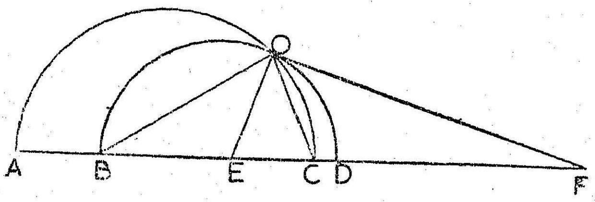
கொள்கை: A, B, C, D ஒரு கோடமைப் புள்ளிகள்.

கண்டுபிடிக்க: AD, BC இவற்றை ஹார்மோனிக்காகப் பிரிக்கும் இரண்டு புள்ளிகள்.

வரைமுறை:

(1) AC, BD மேல் இரு அரை வட்டங்கள் வரைக.

(2) அவை O வில் வெட்டப்படும்.



படம் 34

(3) OA, OB, OC, OD யைச் சேர்க்க.

(4) $\angle BOC$க்கு இருசமவெட்டி OE வரைக. அது BCயை E இல் சந்திக்கட்டும்.

(5) OF, OEக்குச் செங்குத்தாக வரைக. அது AD யை F இல் சந்திக்கட்டும்.

(6) E, F கேட்கப்பட்ட புள்ளிகள்.

நிரூபணம்:

O என்பது AC, BD இவற்றின் மேல் வரையப்பட்ட அரை வட்டத்தில் ஒரு புள்ளி.

$\therefore\ \angle AOC = \angle BOD = 90°$.

இவற்றில் பொதுவான $\angle BOC$ யைக் கழிக்க.

$\angle AOB = \angle COD$.

OE, $\angle BOC$ யின் இருசமவெட்டி (வரைதல்)

$OF \perp OE$. (வரைதல்)

$\therefore$ OF, $\angle BOC$ யின் வெளிப்புற இருசமவெட்டி.

$\therefore\ O\,(BC, EF) = -1.$ (தேற்றம் 6)

$\therefore\ (BC, EF) = -1.$

$\therefore$ E, F என்னும் புள்ளிகள் BCயை ஹார்மோனிக்காகப் பிரிக்கின்றன.

மேலும் $\angle BOE = \angle EOC$.

$\therefore\ \angle AOB + \angle BOE = \angle EOC + \angle COD.$

$\therefore\ \angle AOE = \angle EOD.$

$\therefore$ OE, $\angle AOD$ யின் இருசமவெட்டி.

$OF \perp OE$.

$\therefore$ OF, $\angle AOD$ யின் வெளிப்புற இருசமவெட்டி.

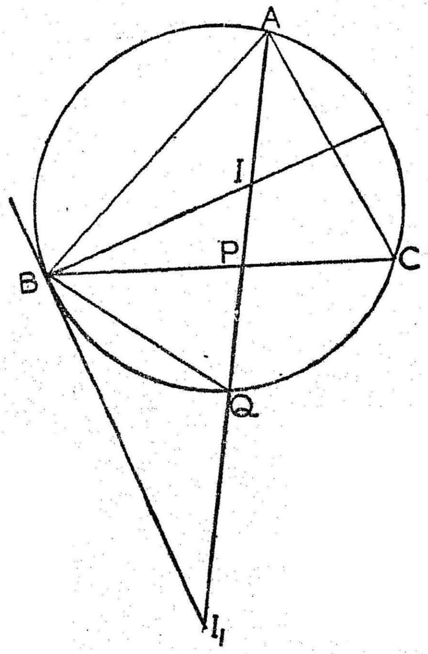
$\therefore$ $O\,(AD, EF) = -1$.

$\therefore$ $(AD, EF) = -1$.

$\therefore$ E, F என்பன AD யையும் ஹார்மோனிக்காகப் பிரிக்கும்.

2. $\triangle ABC$ யில் I உள் வட்டமையம். I_1 என்பது A க்கு எதிரே உள்ள வெளிவட்ட மையம். AI, BC யை P யிலும் $\triangle ABC$ யின் சுற்று வட்டத்தை Q விலும் சந்திக்கிறது.

$QI^2 = QA.\,QP$ என நிரூபிக்கவும்.



படம் 35

கொள்கை: (1) $\triangle ABC$ யில் I உள்வட்டமையம்.

(2) I_1 வெளிவட்ட மையம்.

(3) AI, BC யை P யில் வெட்டுகிறது.

(4) AI, சுற்று வட்டத்தை Q வில் வெட்டுகிறது.

நிருபிக்க: $QI^2 = QA.QP$ என.

நிருபணம்: BQ, BI, BI_1 ஐச் சேர்க்க.

I உள்வட்ட மையம், I_1 வெளிவட்டமையம்.

$\therefore$ I, I_1 என்பன கோணம் A யின் இருசம வெட்டியில் இருக்கின்றன.

$\therefore$ AII_1 ஒரு நேர்கோடு.

BI, BI_1 என்பன கோணம் B யின் இருசம வெட்டிகள்.

$\therefore$ (1) $(AP, II_1) = -1$. (தேற்றம் 6)

(2) $\angle IBI_1 = 90°$.

(3) $QI = QI_1$.

(அ-து) Q, II_1 இன் நடுப்புள்ளி.

$\therefore$ (AP, II_1) என்னும் இசைப்புள்ளி வரிசையில்

$QI^2 = QA \cdot QP$. (தேற்றம் 8)

குறிப்பு: வேண்டியவர்களுக்கு $QI = QI_1$ என்பதற்குத் தனி நிருபணம் கீழே தரப்படுகிறது.

$\triangle ABI$ இல்,

வெளிக்கோணம் $BIQ = \frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B$.

$\angle QBI = \angle QBC + \angle CBI$.

$\angle QBC = \angle QAC$ (ஒரே வட்டப்பகுதியில்)

$\therefore$ $\angle QBI = \angle QAC + \angle CBI$

$= \frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B$

$\therefore$ $\angle BIQ = \angle QBI$

$\therefore$ $BQ = QI$.

$\triangle IBI_1$ இல்,

$\angle IBI_1 = 90°$

$BQ = QI$.

$\therefore$ $QI = QI_1$.

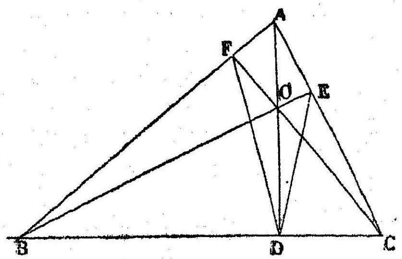
3. $\triangle ABC$ யில் AD, BE, CF குத்துக் கோடுகள். D (B, F, A, E) இசைக் கோட்டுக் கற்றை என நிருபிக்க.

கொள்கை:

$\triangle ABC$ யில் AC, BE, CF குத்துக்கோடுகள்.

நிரூபிக்க :

$D\ (B, F, A, E)$ இசைக் கோட்டுக் கற்றை என.



படம் 36

நிரூபணம் :

O, குத்து மையமாக இருக்கட்டும். (Ortho-centre.) DE, DF ஐச் சேர்க்க.

$\triangle\ ABC$ யில் $\triangle\ DEF$ பெடல் முக்கோணம் (Pedal Triangle)

$\therefore\ AD$, $\angle FDE$ யின் இரு சமவெட்டி. (தனி நிரூபணம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது).

மேலும் $\angle\ ADB = 90°$.

$\therefore\ BD$, $\angle FDE$ யின் வெளிப்புற இருசம வெட்டி.

$\therefore\ D\ (B, F, A, E)$ இசைக் கோட்டுக் கற்றை.

(தேற்றம் 6)

குறிப்பு : வேண்டியவர்களுக்கு, AD, $\angle FDE$ யின் இருசம வெட்டி என்பதற்கு நிரூபணம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

(1) $\angle\ ODB = \angle\ OFB = 90°$.

$\therefore\ ODBF$ வட்ட நாற்கரம்.

$\therefore\ \angle ODF = \angle OBF$ (ஒரே வட்டப் பகுதியில்)

(2) $\angle\ ODC = \angle\ OEC = 90°$.

$\therefore\ ODCE$ வட்ட நாற்கரம்.

$\therefore\ \angle\ ODE = \angle OCE$ (ஒரே வட்டப் பகுதியில்)

(3) $\angle\ BFC = \angle BEC = 90°$.

$\therefore\ BFEC$ வட்ட நாற்கரம்.

$\therefore \angle FBE = \angle FCE$ (ஒரே வட்டப் பகுதியில்)

(அ-து) $\angle OBF = \angle OCE$.

$\therefore \angle ODF = \angle ODE$.

பயிற்சி – 3 (a)

1. $\triangle ABC$ யில் AI, AI_2 என்பன கோணம் A யின் இரு சம வெட்டிகள். $A(BC, II_2) = -1$ என நிருபிக்க.

2. $\triangle ABC$ யில் I உள் வட்ட மையம். I_2, B க்கு எதிரே யுள்ள வெளி வட்டமையம். AI, AI_2 என்பன BC யை X, Y இல் சந்திக்கின்றன. $(BC, XY) = -1$ என நிருபிக்க.

3. $\triangle ABC$ யில் AD, BE, CF குத்துக் கோடுகள். CO, DE யை P யில் வெட்டுகிறது. $(CO; PF) = -1$ என நிருபிக்க.

4. $\triangle ABC$ யில் AA' என்பது $\angle A$ யின் இரு சம வெட்டி. BA' C யின் நான்காவது ஹார்மோனிக் புள்ளியைக் கண்டுபிடிக்க.

5. $ABCD$ ஒரு இசைப்புள்ளி வரிசை. O என்பது அதற்கு வெளியே $OA : OC = AB : BC$ என்னும்படி அமைந்த ஒரு புள்ளி. OB, OD கோணம் AOC யின் இரு சம வெட்டிகள் என நிருபிக்க.

பயிற்சி 3 (b)

1. படம் 34 இல், $\angle AOB$, $\angle COD$ இவற்றின் இரு சம வெட்டிகள் $ABCD$ யை P, Q வில் சந்தித்தால் P, Q என்னும் புள்ளிகள் AB, CD இவை இரண்டையும் ஹார்மோனிக்காகப் பிரிக்கும் என நிருபிக்க.

2. $\triangle ABC$ யில் AA_1, AA_2 கோணம் A யின் இரு சம வெட்டிகள். அவை BC யை A_1, A_2 வில் சந்திக்கின்றன. BB_1, BB_2 கோணம் B யின் இரு சம வெட்டிகள். அவை CA யை B_1, B_2 வில் சந்திக்கின்றன. CC_1, CC_2 கோணம் C யின் இரு சம வெட்டிகள். அவை AB யை C_1, C_2 இல் சந்திக்கின்றன. A_2, B_2, C_2 ஒரு கோடமை புள்ளிகள் என நிருபிக்க.

3. $\triangle ABC$ யில் A செங்கோணம். BC யின் நடுப்புள்ளி O. S_1, S_2 என்பன $\triangle AOB$, $\triangle AOC$ யின் சுற்று வட்ட மையங்கள். $O(B, S_1, A, S_2)$ இசைக் கோட்டுக் கற்றை என நிரூபிக்க.

4. $\triangle ABC$ யில் I உள் வட்டமையம். AI, BI, CI முறையே BC, CA, AB யை D, E, F இல் சந்திக்கின்றன. EF, BC யை D_1 இல் சந்திக்கிறது. AD_1, கோணம் A யை இருசமக் கூறிடுகிறது என நிரூபிக்க.

5. $\triangle ABC$ யில், I உள் வட்ட மையம். I_2 என்பது B க்கு எதிரேயுள்ள வெளி வட்ட மையம், O குத்து மையம் S, சுற்று வட்ட மையம்.

AI_1, AI_2 இரண்டும் AB, AC; AS, AO இந்த இரண்டு ஜோடிக் கோடுகளுக்கும் இசைத் துணைக்கோடுகள் என நிரூபிக்க.

6. AB யை P, Q என்னும் புள்ளிகள் இசையாகப் பிரிகின்றன. O என்பது PQ வை விட்டமாகவுடைய வட்டத்தின் மேல் ஒரு புள்ளி. OP, OQ, கோணம் AOB யின் இருசம வெட்டிகள் என நிரூபிக்க.

7. A, B, C, D ஒரு கோடமை புள்ளிகள். P, Q என்னும் புள்ளிகள் AB, CD இவை இரண்டையும் இசையாகப் பிரிக்கின்றன. PQ வை விட்டமாகவுள்ள வட்டமும், BD யை விட்டமாகவுமுள்ள வட்டமும் O வில் சந்திக்கின்றன.

$\angle ACO = \angle BOD$ என நிருபிக்கவும்.

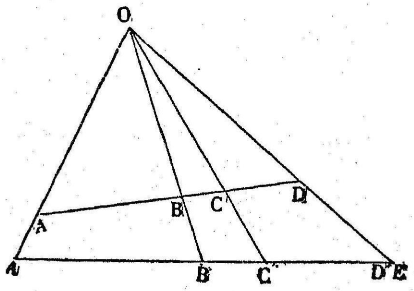
8. ஒரு வட்டத்தில் AB, CD குத்து நாண்கள். P வட்டத்தின் மேல் ஏதாவது ஒரு புள்ளி. $P(AB, CD) = -1$ என நிருபிக்க.

9. $\triangle ABC$ யில் AD, BE, CF குத்துக் கோடுகள். AD, EF ஐ X இலும் BC யை D இலும் சந்திக்கிறது. $FXED$ இசைப்புள்ளி வரிசை என நிருபிக்க.

10. S, $\triangle ABC$ யின் சுற்று வட்ட மையம். S இலிருந்து BC க்கு வரையப்பட்ட குத்துக் கோடு முறையே AB, AC இவற்றை P, Q வில் சந்திக்கிறது. $SP.\ SQ = R^2$ என நிருபிக்கவும். (R-சுற்று வட்ட ஆரம்).

தேற்றம் 7

இரண்டு நேர்கோடுகளிலுள்ள இசைப்புள்ளி வரிசைகளில் 3 ஜதை ஒத்த புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிச் சென்றால் 4 வது ஜதை ஒத்த புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோடும் அதே புள்ளிவழிச் செல்லும்.



படம் 37

கொள்கை: (1) $ABCD$, $A'B'C'D'$ இசைப்புள்ளி வரிசைகள்.

(2) AA', BB', CC', O வழிச் செல்லுகின்றன.

நிரூபிக்க: DD' உம் O வழிச் செல்லும்.

நிரூபணம்: DD', O வழிச் செல்லவில்லையென்றால், OD என்பது $A'B'C'$ ஐ E' இல் வெட்டட்டும்.

$(ABCD) = -1.$

$\therefore\ O\,(ABCD) = -1.$ (தேற்றம் 5)

$A'B'C'E'$ அதற்கு ஒரு குறுக்கு வெட்டி.

$\therefore\ O\,(A'B'C'E') = -1.$ (தேற்றம் 5)

$\therefore\ (A'B'C'E') = -1.$ (,, ,,)

ஆனால் $(A'B'C'D') = -1$. (கொள்கை)

$\therefore\ D'$, E' இன் மேல் பொருந்தும். (தேற்றம் 1)

$\therefore\ DD'$, O வழிச் செல்கிறது.

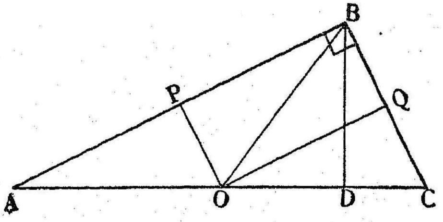
கிளைத்தேற்றம்:

இரண்டு கோடுகளிலுள்ள இசைப்புள்ளி வரிசைகளில் ஒரு ஜதை ஒத்த புள்ளிகள் இரண்டு கோடுகளும் சந்திக்கும்

புள்ளி என்றால், மற்ற 3 ஜதை ஒத்த புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லும்.

ABCD, *A'B'C'D'* இசைப்புள்ளி வரிசைகள்.

BC, *B'C'* கண்டிப்பாக ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும். அது *O* என்போம்.



படம் 38

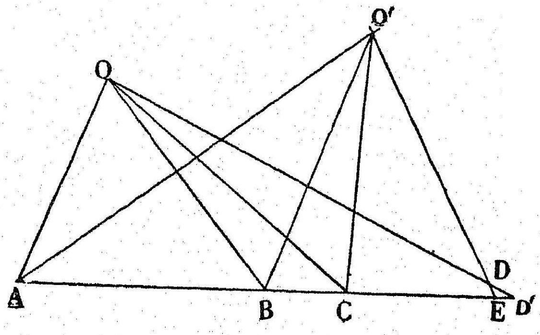
A பொதுப்புள்ளி.

∴ 3 ஜதைப் புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோடுகள் *O* வில் சந்திக்கின்றன.

∴ *DD'* உம் *O* வழிச் செல்லும்.

தேற்றம் 8

இரண்டு இசைக்கோட்டுக் கற்றைகளில், மூன்று ஒத்த கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளிகள் ஒரு கோடமை புள்ளிகளானால், நான்காவது ஜதை ஒத்த கோடுகளும் அதே நேர் கோட்டின் மேல் சந்திக்கும்.



படம் 39

கொள்கை: (1) $(ABCD) = O'\,(ABCE) = -1$.

(2) $OA, O'A$ சந்திக்கும் புள்ளி A.
$OB, O'B$,, ,, B.
$OC, O'C$,, ,, C.
$OD, O'D$,, ,, D.
(3) A, B, C ஒரு கோட்டில் உள்ளன.

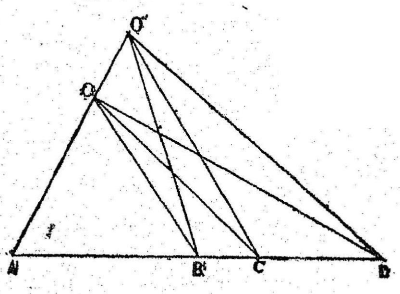
நிருபிக்க: D யும் ABC யில் உள்ளது என.

நிருபணம்: D, ABC என்னும் கோட்டில் இல்லாவிட்டால், OD, ABC யை D' இல் வெட்டட்டும். $O' D$, ABC யை E இல் வெட்டட்டும்.
$O\ (ABCD) = -1.$

$ABCD'$ குறுக்கு வெட்டி அதை வெட்டுகிறது.
$\therefore\ (ABCD') = -1.$ (தேற்றம் 5)
ஆனால் $O'\ (ABCD) = -1.$ (கொள்கை)
$\therefore\ (ABCE) = -1.$ (தேற்றம் 5)
$\therefore\ (ABCD') = (ABCE) = -1.$
$\therefore$ D', E ஒன்றின் மேல் ஒன்று பொருந்தும்.
$\therefore$ OD, $O'D$, என்பன ABC யின் மேல் வெட்டுகின்றன. (தேற்றம் 1)

கிளைத்தேற்றம்

இரண்டு இசைக்கோட்டுக் கற்றைகளுக்கு ஒரு கதிர் (Ray) பொதுவானல், மற்ற மூன்று ஜதை ஒத்த கோடுகளும் வெட்டும் புள்ளிகள் ஒரு கோடமை புள்ளிகள்.



படம் 40

$O\ (ABCD) = O'\ (ABCD) = -1.$
$OO'\ A$ ஒரு பொதுக்கோடு.

OB, $O'B$, B யில் வெட்டுகின்றன.

OC, $O'C$, C யில் வெட்டுகின்றன.

OD, $O'D$, D யில் வெட்டுகின்றன.

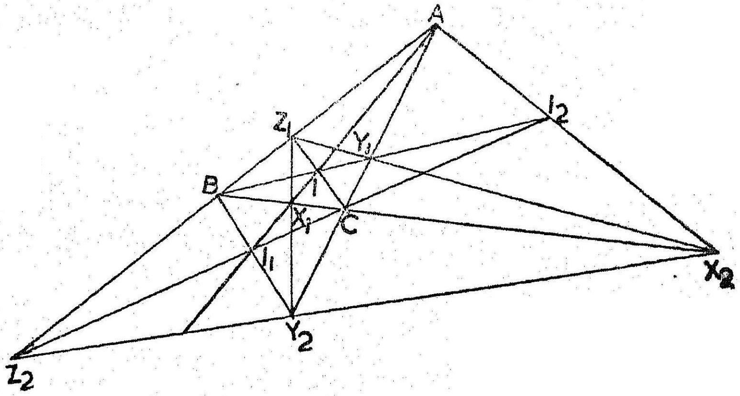
BC வழியே எப்போதும் ஒரு நேர்கோடு வரையலாம்.

அது $OO'A$ வை A யில் வெட்டினுல், ABC ஒரு நேர்கோடு.

$\therefore$ D, ABC யில் இருக்கும்.

மாதிரி

1. $\triangle ABC$ யில், I உள்வட்டமையம். I_2, B க்கு எதிரே உள்ள வெளிவட்டமையம். AI, BI, CI முறையே BC, CA, AX யை X_1, Y_1, Z_1 இல் சந்திக்கின்றன. $Y_1 Z_1$, $Y_1 X_1$, $X_1 Y_1$ முறையே BC, CA, AB யை X_2, Y_2, Z_2 வில் சந்திக்கின்றன. $Y_1 Z_1$, $Y_2 Z_2$, AI_2 இவை BC யில், X_2 வில் சந்திக்கின்றன என நிருபிக்கவும்.



படம் 41

கொள்கை: (1) $\triangle ABC$ யில், AX_1, BY_1, CZ_1 கோணங்களின் இருசம வெட்டிகள்.

(2) அவை I யில் சந்திக்கின்றன.

(3) I_2, B க்கு எதிரே உள்ள வெளிவட்டமையம்.

(4) Y_1 Z_1, BC யை X_2 வில் சந்திக்கிறது.

(5) $Z_1 X_1$, ACயை Y_2 வில் சந்திக்கிறது.

(6) $X_1 Y_1$, AB யை Z_2 வில் சந்திக்கிறது.

நிருபிக்க: $Y_1 Z_1$, BC, $Y_2 Z_2$, AI_2 இவை X_2வில் சந்திக்கின்றன என்று.

நிருபணம்: AI, AI_2 என்பன கோணம் A இன் இருசம வெட்டிகள்.

$\therefore (BX_1\, CX_2) = -1.$ (தேற்றம் 6)

$\therefore$ BC யில், X_2, X_1 இன் இசைத்துணைப்புள்ளி.

அதே போல்

$$(A Z_1\, BZ_2) = -1.$$

$$(A Y_1\, CY_2) = -1.$$

இவை இரண்டுக்கும் A பொதுப்புள்ளி.

$\therefore$ மற்ற ஒத்த புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிக்கோடுகள்.

$\therefore$ $Y_1 Z_1$, BC, $Y_2 Z_2$ ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றன.

AX_1, BY_1, CZ_1 ஒரு புள்ளி வழிக்கோடுகள் ஆகையால் $Y_1 Z_1$, BC யை X_1 இன் இசைத்துணைப்புள்ளியில் சந்திக்கிறது. (செய்யப்பட்ட மாதிரி 1, தேற்றம் 1)

$\therefore$ $Y_1 Z_1$, X_2 வழியே செல்கிறது.

$\therefore$ $Y_2 Z_2$, BC, $Y_1 Z_1$ இவை BC யின் மேல் X_2 வில் சந்திக்கின்றன.

$A\,(BC_1\, II_2) = -1$ ஆனதாலும், AI, X_1 வழிச் செல்வதாலும் AI_2 வும் X_2 வும் வழியே செல்லும்.

பயிற்சி—4 (a)

1. படம் 41 இல் AB, $X_1 Y_1$, $I_1 I_2$, $X_2 Y_2$ என்பன Z_2 புள்ளிவழிச் செல்கின்றன என நிருபிக்க.

2. படம் 41 இல் AC, $X_1 Z_1$, $X_2 Z_2$, $I_1 I_3$ இவை Y_2 வழிச் செல்லுகின்றன என நிருபிக்க.

பயிற்சி—4 (b)

1. $\triangle ABC$ யில் AD, BE_1, CF குத்துக் கோடுகள். O குத்து மையம். EF, FD, DE முறையே BC, CA, AB யை D_1, E_1, F_1 இல் சந்திக்கின்றன. DF, $D_1 F_1$ இவை AC யின் மேல் சந்திக்கின்றன என நிருபிக்கவும்.

2. AA_1, BB_1, CC_1 ஒரு முக்கோணத்தில் P என்னும் ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லும் கோடுகள். B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 முறையே BC_1, CA_1, AB யை A_2, B_2, C_2 வில் சந்திக்கின்றன. A_1C_1, A_2C_2 இவை AC யின் மேல் சந்திக்கின்றன என நிரூபிக்கவும்.

3. $ABCD$ ஒரு இணைகரம். EG, FH முறையே BC, ABக்கு இணையாக உள்ளபடி, E, F, G, H என்பன AB, BC, CD, DA வின் மேல் புள்ளிகள். EF, BD, HG ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள் என நிரூபிக்க.

4. $\triangle ABC$ யில் AA_1, BB_1, CC_1 என்பன ஏதாவது ஒருபுள்ளி P வழியே முனைகளிலிருந்து எதிர் பக்கத்துக்கு வரையப்படும் கோடுகள். B_1C_1 என்பது BC யை A_2 விலும், A_1B_1 என்பது AB யை C_2 விலும் வெட்டுகின்றன. AA_2, CC_2 என்பன Q வில் வெட்டுகின்றன. B, P, Q ஒரு, கோடமை புள்ளிகள் என நிரூபிக்க.

5. $\triangle ABC$ யில் உள்வட்டம் பக்கங்கள் BC, CA, AB யை முறையே X, Y, Z இல் தொடுகிறது. Y_2, BC யை X_1 இல் சந்திக்கிறது. AD, BE, CF அதே முக்கோணத்தின் குத்துக் கோடுகள். FD, AC யை E_1 இல் சந்திக்கிறது. AX, BE, P இல் வெட்டுகின்றன. AX_1, BE_1, Q வில் வெட்டுகின்றன. P, C, Q ஒரு கோடமை புள்ளிகள் என்று நிரூபிக்க.

6. ABC ஒரு முக்கோணம். AD, AE இரண்டும் AB, ACக்கு இசைத்துணைக் கோடுகள். BF, BG இரண்டும் BA, BCக்கு இசைத் துணைக் கோடுகள்.

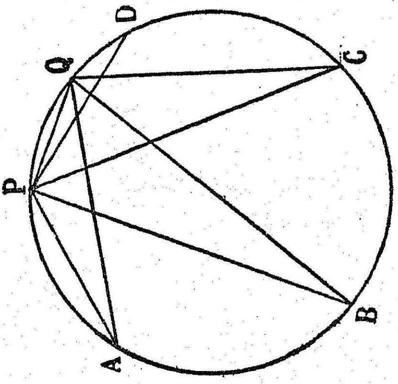
(1) AD, BF, X இல் சந்திக்கின்றன.
(2) AE, BG, Y இல் சந்திக்கின்றன.
(3) AD, BG, P யில் சந்திக்கின்றன.
(4) AE, AF, Q வில் சந்திக்கின்றன.

PQ, XY இரண்டும் C யில் சந்திக்கின்றன என நிரூபிக்க.

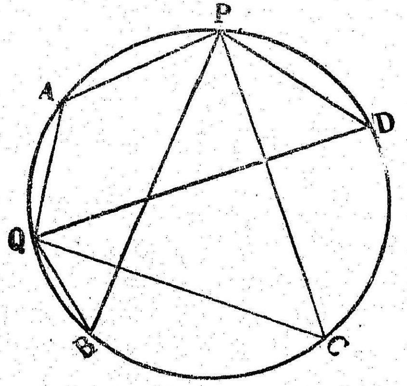
7. $\triangle ABC$ யில் I, I_1, I_2, I_3 உள் வட்ட வெளி வட்ட மையங்கள். BI, CI எதிர்ப்பக்கங்களை B_1, C_1 இல் வெட்டுகின்றன. B_1C_1, I_2I_3 இவை BC யில் வெட்டுகின்றன என நிரூபிக்க.

தேற்றம் 9

ஒரு வட்டத்தின் மேலுள்ள நான்கு புள்ளிகளை அதன் மேலுள்ள மற்றொரு புள்ளியுடன் சேர்ப்பதனாலாகும் கோட்டுக்கற்றை ஹார்மோனிக் ஆனால் அவற்றை அந்த வட்டத்தில் மேலுள்ள வேறு எந்த புள்ளியுடன் சேர்த்தாலும் கிடைப்பது ஹார்மோனிக் கற்றையே.



படம் 42



படம் 43

கொள்கை : (1) *A, B, C, D* வட்டத்தின் மேல் நான்கு புள்ளிகள்.

(2) $P\,(ABGD) = -1$.

(3) *Q* வட்டத்தில் மற்றொரு புள்ளி.

நிரூபிக்க : $Q(ABCD) = -1$

நிரூபணம் : படம் 42 பார்க்கவும்.

P, Q இரண்டும் AD என்னும் ஒரே வட்டப்பகுதியிலுள்ளவை.

அதில் $\angle APB = \angle AQB$, $\angle CPD = \angle CQD$, $\angle APD = \angle AQD$, $\angle CPB = \angle CQB$ (ஒரே வட்டப் பகுதியில் உள்ள கோணங்கள்)

படம் 43 பார்க்கவும்.

P யும் Q வும் வெவ்வேறு வட்டப் பகுதிகளிலுள்ளவை.

$\angle APB = \angle AQB$ யின் மிகை நிரப்பி. ($AQBP$) வட்ட நாற்கரம்)

$\angle CPD = \angle CQD$ (ஒரே வட்டப் பகுதியில்)

$\angle APD = \angle AQD$ யின் மிகை நிரப்பி. ($AQDP$ வட்ட நாற்கரம்)

$\angle CPB = \angle CQB$ ஒரே வட்டப் பகுதியில்)

$\therefore$ இரண்டு படங்களிலும்,

$$P(ABCD) = \frac{\sin APB.\ \sin CPD}{\sin APD.\ \sin CPB}$$

$$= \frac{\sin AQB.\ \sin CQD}{\sin AQD.\ \sin CQB}$$

$$= Q(ABCD)$$

ஆனல் $P(ABCD) = -1$

$\therefore Q\ ABCD) = -1.$

குறிப்பு : இம்மாதரி நான்கு புள்ளிகள் ஒரு ஹார்மோ[illegible] வட்டப்புள்ளிகள் என்று சொல்லப்படும் (Hormonic systen[illegible] points on a circle).

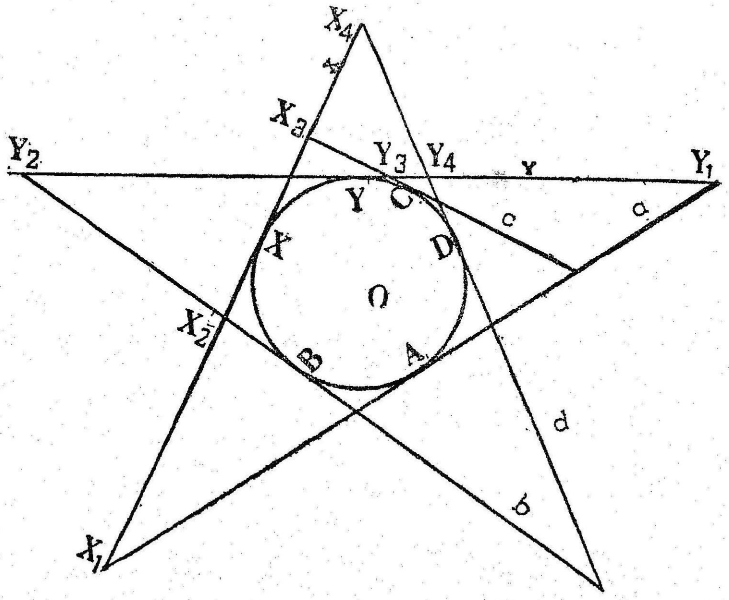
கிளைத்தேற்றம்

A, B, C, D ஹார்மோனிக் வட்டப் புள்ளிகள் ஆ[illegible] AT, AB, AC, AD (AT என்பது A யில் வட்டத்துக்கு வ[illegible]யப்பட்ட தொடுகோடு) இவை ஹார்மோனிக் கற்றை ஆகு[illegible]

ஆதலால், ஒரு வட்டத்தில் 4 ஹார்மோனிக் வட்டப்பு[illegible]கள் இருந்தால், அவற்றில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் விட்[illegible]துக்கு வரையப்படும் தொடுகோடும், அந்தப் புள்ளியை ப[illegible] மூன்று புள்ளிகளுடன் இணைக்கும் கோடுகளும் சேர்ந்து ஹார்மோனிக் கற்றையாகும்.

தேற்றம் 10

ஒரு வட்டத்தின் நான்கு தொடுகோடுகள் மற்றொரு தொடுகோட்டை வெட்டும் புள்ளிகள் இசைப்புள்ளி வரிசையானல், வட்டத்தின் எந்தக் கோட்டையும் இந்த நான்கு தொடுகோடுகள் இசைப்புள்ளி வரிசையில் வெட்டும்.



படம் 44

கொள்கை :

(1) a,b,c,d என்னும் கோடுகள் ஒரு வட்டத்தை A,B,C,D யில் தொடுகின்றன.

(2) r வட்டத்தை X இல் தொடுகிறது.

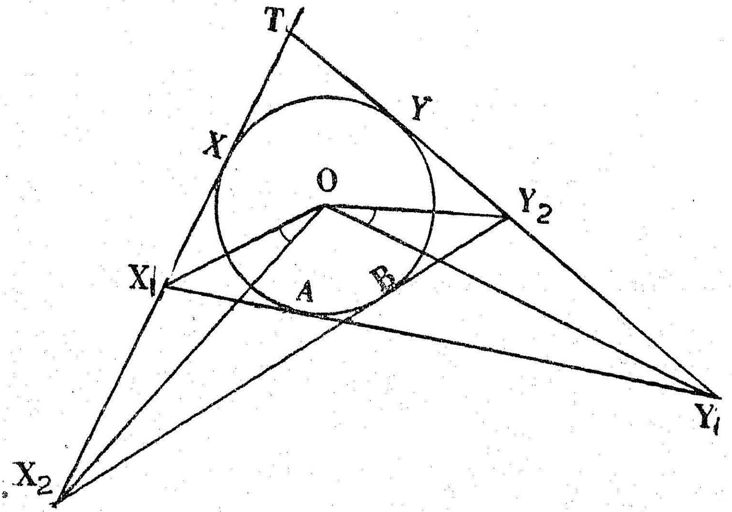
(3) a, b, c, d யை X என்பது X, X_1, X_2, X_3, X_4 என்னும் புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது.

(4) Y என்னும் கோடு வட்டத்தை Y இல் தொடுகிறது.

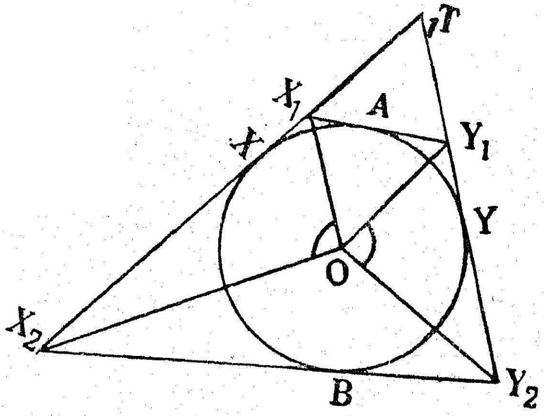
(5) a, b, c, d யை Y என்பது Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 இல் வெட்டுகிறது.

(6) $(X_1 X_2 X_3 X_4) = -1$.

நிறுபிக்க : $(Y_1\,Y_2\,Y_3\,Y_4) = -1$.



படம் 45



படம் 46

நிருபணம்: X, Y இல் தொடுகோடுகள் T யில் வெட்டட்டும். எளிதில் பார்க்கக் கூடியபடி படம் 45, படம் 46 வரையப்பட்டிருக்கின்றன. வட்டத்தின் மையம் O ஆகட்டும். OX_1, OX_2, OY_1, OY_2 வைச் சேர்க்க. படம் 46 இல் அவை வெவ்வேறு வட்டப் பகுதியில் உள்ளன.

படம் 45

$\triangle$ TX_2Y_2 வில் வட்டம் (O) உள் வட்டமாகும்.

$\therefore$ $\angle X_2OY_2 = 90° + \frac{1}{2}T$.

$\triangle$ TX_1Y_1 இலும் வட்டம் (O) உள் வட்டமாகும்.

$\angle X_1OY_1 = 90° + \frac{1}{2}T$

$\therefore$ $\angle X_1OY_1 = \angle X_2OY_2$.

பொதுவான $\angle X_2OY_1$ ஐக் கழிக்க, $\angle X_1O\lambda_2 = \angle Y_1OY_2$.

படம் 46

$\triangle$ TX_2Y_2 வில் வட்டம் (O) உள் வட்டம்.

$\therefore$ $\angle X_2OY_2 = 90° + \frac{1}{2}T$.

$\triangle$ TX_1Y_1 இல் வட்டம் (O) வெளிவட்டம்.

$\therefore$ $\angle X_1OY_1 = 90° - \frac{1}{2}T$.

$\therefore$ $\angle X_1OY_1 = \angle X_2OY_2$ இன் மிகை நிரப்பி.

$\therefore$ வட்ட மையத்தில் உள்ள மற்ற 2 கோணங்களும் மிகை நிரப்பிகள்.

$\therefore$ $\angle X_1OX_2 = \angle Y_1OY_2$ இன் மிகை நிரப்பி.

இரண்டு படங்களிலும்

$$\sin X_1OX_2 = \sin Y_1OY_2.$$

இதுபோலவே $\sin X_3OY_2 = \sin Y_2OY_3$ முதலியன நிரூபிக்கலாம்.

$$\therefore\ O\,(X_1X_2X_3X_4) = \frac{\sin X_1OX_2 \,.\, \sin X_3OX_4}{\sin X_1OX_4 \,.\, \sin X_3OX_2}$$

$$= \frac{\sin Y_1OY_2 \sin Y_3OY_4}{\sin Y_1OY_4 \,.\, \sin Y_3OY_2}.$$

$$= O(Y_1Y_2Y_3Y_4)$$

$$\therefore\ (X_1X_2X_3X) = O\,(Y_1Y_2Y_3Y_4)$$

ஆனால் $(X_1X_2X_3X_4) = -1.$

$$\therefore\ (Y_1Y_2Y_3Y_4) = -1.$$

குறிப்பு: இத்தகைய 4 தொடுகோடுகள் ஹார்மோனிக் வட்டத் தொடுகள் ஆகும் (Harmonic system of tangents).

ஒரு வட்டத்தின் நான்கு தொடுகள் அந்த வட்டத்தின் மற்ற எந்தத் தொடு கோட்டையும் ஹார்மோனிக் வரிசையில் வெட்டினால், ஹார்மோனிக் வட்டத் தொடுகோடுகள் எனப்படும்.

கிளைத்தேற்றம்

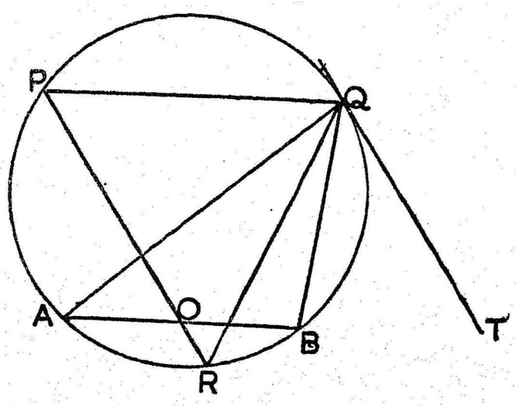
X, A யுடன் பொருந்தினால், a யை b, c, d இவை A_2, A_3, A_4 இல் வெட்டினால் $(A\,A_2\;A_3\;A_4) = -1$.

ஆகவே

நான்கு ஹார்மோனிக் வட்டத் தொடுகோடுகள் இருந்தால் அவற்றில் ஒன்று வட்டத்தைத் தொடும் புள்ளியும், அதை பற்ற 3 தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளிகளும் இசைப் புள்ளி வரிசையாகும்.

மாதிரி :

1. PO, AB ஒரு வட்டத்தின் இணை நாண்கள், O, AB யின் நடுப்புள்ளி PO, வட்டத்தை R இல் வெட்டுகிறது. $Q(A, Q, B, T)$ இசைக் கோட்டுக் கற்றை என நிருபிக்க.



படம் 47

கொள்கை : (1) AB, PQ வட்டத்தில் இணை நாண்கள்

(2) O, AB யின் நடுப்புள்ளி.

(3) QT. Q வில் தொடுகோடு.

(4) $P\,O$ வட்டத்தை R இல் வெட்டுகிறது.

நிருபிக்க : $(ARBT) = 1$ என.

நிருபணம் : $P\,(A\;O\;B\;Q)$ என்னும் **கோட்டுக்கற்றையில்**

$A\,B \parallel P\,O$. (கொள்கை)

மேலும் $AO = OB$.

$\therefore \quad P(AO\;B\;Q) = -1$ **(தேற்றம் 5)**

$\therefore \quad P(AR\;BQ) = -1$

$\therefore \quad Q(ARBQ) = -1$ (தேற்றம் 9)

Q வில் வரையப்படும் தொடுகோடு QT.

$\therefore \quad Q(ARBT) = -1.$

இருபான்மை நெறித் தத்துவம் (Principle of dulity)

A, B என்னும் இரண்டு புள்ளிகள் இருந்தால், அவற்றைச் சேர்க்கும் நேர்கோடு AB அந்த நேர் கோட்டின் நீளத்தை AB என்று குறிக்கிறோம்.

a, b என்னும் இரண்டு கோடுகள் இருந்தால் அவை சந்திக்கும் புள்ளி ab. அவற்றிற்கு இடையே உள்ள கோணத்தை $\widehat{ab}$ என்று குறிக்கிறோம்.

சாதாரணமாகப் புள்ளிகளைப் பெரிய எழுத்துக்களிலும் கோடுகளைச் சிறிய எழுத்துக்களிலும் குறிப்பது வழக்கம்.

ஒரு வரைவடிவப் பண்பைப் (Geometrical property) புள்ளிகளை ஆதாரமாக் கொண்டு சொன்னால், கோடுகளை ஆதாரமாகக் கொண்டு மற்றொரு பண்பு நிர்ணயிக்கலாம். (உ-ம்) 3 புள்ளிகள் A, B, C ஒரு கோடமை புள்ளிகள் என்பதை எடுத்துக் கொள்வோம். அதற்கு '3 கோடுகள் a, b, c ஒரு புள்ளி வழிக்கோடுகள்' என்பது ஒத்த பண்பு ஆகும். இம்மாதிரி அளவுகள் சம்பந்தப்படாத தேற்றங்கள் 'புள்ளி, கோடு' தொடர்பில் இருந்தால் அதற்கு ஒத்த தேற்றங்கள் 'கோடு, புள்ளி' தொடர்பில் இருக்கும். இதனை இருபான்மை நெறித்தத்துவம் என்று சொல்கிறோம்.

சில ஒத்த தொடர்புகளைக் கீழே காணலாம்.

புள்ளிகளை ஆதாரமாகக் கொண்ட தொடர்புகள்	கோடுகளை ஆதாரமாகக் கொண்ட தொடர்புகள்
1. $ABCD$ ஒரு நேர்கோட்டில் உள்ள புள்ளி வரிசை.	$abcd$ ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லும் கோட்டுக் கற்றை.
2. A, B, C, D ஒரு கோடமை புள்ளிகள்.	$abcd$ ஒரு புள்ளிவழிக் கோடுகள்.
3. 3 புள்ளிகள் A, B, C யை இரண்டிரண்டாக 3 கோடுகளால் சேர்க்கலாம்.	3 கோடுகள் a, b, c இரண்டிரண்டாக 3 புள்ளிகளில் வெட்டும்.

4. 4 புள்ளிகள் A, B, C, D யை இரண்டிரண்டாகச் சேர்த்து 6 கோடுகள் வரையலாம்.

4 கோடுகள் a, b, c, d இரண்டிரண்டாக 6 புள்ளிகளில் வெட்டும்.

5. A, B, C, D என்னும் புள்ளிகளை P யுடன் சேர்க்க $P(A, B, C, D)$ என்னும் கோட்டுக் கற்றை கிடைக்கிறது.

a, b, c, d என்னும் 4 கோடுகளை மற்றொரு கோடு, p வெட்டும்போது, $p(a, b, c, d)$ என்னும் புள்ளி வரிசை கிடைக்கிறது.

6. ஒரு குறுக்கு வெட்டி ஒரு கோட்டுக் கற்றையை வெட்டும்போது ஒரு புள்ளி வரிசை கிடைக்கிறது.

ஒரு கோடமை புள்ளிகளை மற்றொரு புள்ளியுடன் சேர்க்கும்போது ஒரு கோட்டுக் கற்றை உண்டாகிறது.

7. $A\ B\ C\ D$ ஹார்மோனிக் வரிசை என்றால் $(ABCD) = -1$.

$a\ b\ c\ d$ ஹார்மோனிக் கற்றை என்றால்
$(abcd) = -1$

8. $$(ABCD) = \frac{AB \cdot CD}{AD \cdot CB}.$$

$$abcd = \frac{\sin \widehat{ab} \cdot \sin \widehat{cd}}{\sin \widehat{ad} \cdot \sin \widehat{cb}}$$

இருபான்மை நெறித் தத்துவம் நீளம், அகலப் பரப்பு முதலிய அளவுகள் சம்பந்தப்பட்ட பண்புகளுக்கு உண்மையாகாது; கோடுகள், புள்ளிகள், வினிதங்கள் முதலியவற்றை மட்டும் கொண்ட பண்புகளுக்கு உண்மையாகும். உதாரணமாக ஒரு முக்கோணத்தின் 3 கோணங்களும் சேர்ந்து 180° என்பதற்கு இருபான்மை நெறித் தேற்றம் கிடையாது.

சில இருபான்மை நெறிப் பண்புகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

புள்ளிகளை ஆதாரமாகக் கொண்ட பண்புகள்	கோடுகளை ஆதாரமாக் கொண்ட பண்புகள்
1. ஒரு இசைக் கோட்டுக் கற்றையை ஒரு குறுக்கு வெட்டி வெட்டும் போது ஒரு இசைப் புள்ளி வரிசை கிடைக்கிறது.	ஒரு இசைப் புள்ளி வரிசையிலுள்ள புள்ளிகளைக் கோட்டுக்கு வெளியே உள்ள ஒரு புள்ளியுடன் சேர்க்கும்போது ஒருஇசைக் கோட்டுக் கற்றை கிடைக்கிறது.
2. ஒரு இசைப்புள்ளி வரிசையின் குறுக்கு விகிதம், அதன் புள்ளிகளை மற்றொரு புள்ளியுடன் சேர்ப்பதால் உண்டாகும் கோட்டுக் கற்றையின் குறுக்கு விகிதத்துக்குச் சமம்.	ஒரு இசைக் கோட்டுக் கற்றையின் குறுக்கு விகிதம் அதனை வெட்டும் குறுக்கு வெட்டியின் புள்ளி வரிசையின் குறுக்கு விகிதத்துக்குச் சமம்.
3. $ABCD$, $A'B'C'D'$ இசைப் வரிசைகளானால், BB', CC', DD' ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள்.	$a\ b\ c\ d$, $ab'c'd'$, இசைக் கோட்டுக் கற்றைகளானால், bb', cc', dd' ஒரு கோடமை புள்ளிகள்.
4. இரண்டு இசைப் புள்ளி வரிசை 3 ஜதைகளில் ஒத்த புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிக்கோடுகளானால், 4 வது ஜதை ஒத்த புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோடும் அந்தப் புள்ளி வழிச் செல்லும்.	இரண்டு இசைக் கோட்டுக் கற்றைளின் ஜதை ஒத்த கதிர்கள் வெட்டும் புள்ளிகள் ஆனால் 4 வது ஜதை ஒத்த கதிர்கள் வெட்டும் புள்ளியும் அக் கோட்டில் அமையும்.
5. P, A, B, C, D என்னும் புள்ளிகள் ஒரு வட்டத்தில் $P\ (ABCD) = -1$ ஆகும்படி அமைந்தால் வட்டத்தில் Q வேறொரு புள்ளியானால், $Q\ (ABCD) = -1$ ஆகும்.	p, a, b, c, d என்னும் தொடு கோடுகள் ஒரு வட்டத்தில் $p\ (abcd) = -1$ ஆகும்படி அமைந்தால் அவ்வட்டத்திற்கு q வேறொரு தொடு கோடானால், $q\ (abcd) = -1$ ஆகும்.

மேற் கண்ட உதாரணங்களிலிருந்து, ஹார்மோனிக் பண்புகள் இருபான்மை நெறித் தத்துவத்தின்படி அமைந்தவை என்பது புலனாகிறது. அதே மாதிரி வட்டத்தின் புள்ளிகளும் தொடுகோடுகளும் இதிதத்துவத்தின்படி அமைந்தவை.

ஒரு வட்டத்தைப் பற்றிய இருபான்மை நெறித் தத்துவம்.

புள்ளியை ஆதாரமாகக் கொண்ட தொடர்புகளும் பண்புகளும்	கோட்டை ஆதாரமாகக் கொண்ட தொடர்புகளும் பண்புகளும்
1. ஒரு வட்டத்தின் மேல் உள்ள ஒரு புள்ளி.	ஒரு வட்டத்தைத் தொடும் தொடுகோடு.
2. வட்டத்தின் இரண்டு புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடு.	வட்டத்தின் இரண்டு தொடு கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி.
3. ஒரு வட்டத்தை ஒரு நேர்கோடு இரண்டு புள்ளி களில் வெட்டும்.	ஒரு வட்டத்துக்கு ஒரு புள்ளி யிலிருந்து இரண்டு தொடு கோடுகள் வரையலாம்.
4. ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரே தூரத்தில் உள்ள புள்ளி கள் ஒரு வட்டத்தில் அமையும்.	ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரே தூரத்தில் உள்ள நேர்கோடு கள் ஒரு வட்டத்தைத் தொடும்.

இதிலிருந்து ஒரு தேற்றத்தை நிருபித்தால் இருபான்மை நெறித் தத்துவத்தை உபயோகித்து அதற்கு ஒத்த தேற்றத்தைத் தனி நிருபணம் இன்றி நிறுவலாம்.

மாதிரிகள்

1. A, B, C, D ஒரு ஹார்மோனிக் வட்டப் புள்ளிகளானால், AB, CD; A யில் தொடுகோடு, BQ; D யில் தொடுகோடு AC, இவை வெட்டும் புள்ளிகள் ஒரு கோடமை புள்ளிகள் என நிருபிக்க.

இதன் இருபான்மைத் தேற்றத்தை எழுதுக.

கொள்கை: (1) A, B, C, D ஹார்மோனிக் வட்டப் புள்ளிகள்.

(2) AB, CD, Q வில் சந்திக்கின்றன.

(3) AP, A யில் தொடுகோடு. AP, DB, P யில் வெட்டுகின்றன.

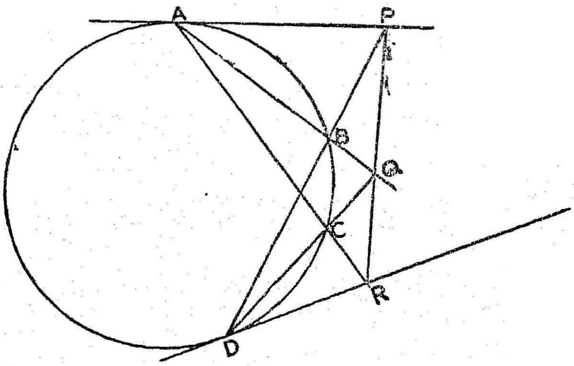
(4) DR, D யில் தொடுகோடு. DR, AC யை R இல் வெட்டுகிறது.

நிருபிக்க: PQR ஒரு நேர்கோடு என.

நிரூபணம்: *ABCD* ஹார்மோனிக் வட்டப் புள்ளிகள்.

$\therefore \quad A\ (ABCD) = -1.$ (தேற்றம் 9)

(அ-து) $A\ (PBCD) = -1.$



படம் 48

மேலும் $D\ (ABCD) = -1.$

(அ-து) $D\ (ABCR) = -1.$

$\therefore \quad D\ (BCRA) = -1.$

($= \frac{1}{\lambda}$. சம குறுக்கு விகிதங்கள் பட்டியல் பார்க்கவும்)

$\therefore \quad D\ (BCRA) = A\ (PBCD).$

இவற்றில் *AD* பொது.

$\therefore$ *DB, AP; DC, AB; DR, AC* சந்திக்கும் புள்ளிகள் ஒரு கோடமைவன. (அ-து) *P, Q, R* ஒரு கோடமை புள்ளிகள்.

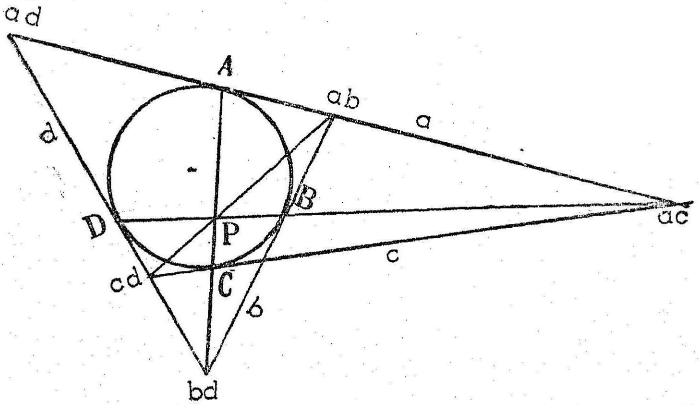
$\therefore$ *PQR* ஒரு நேர்கோடு.

இதன் இருபான்மைத் தேற்றம்

A,B,C,D ஹார்மோனிக் வட்டத் தொடு கோடுகளானால், *ab, cd*; *A, bd*; *D, ac*; இவைகளைச் சேர்க்கும் கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள்.

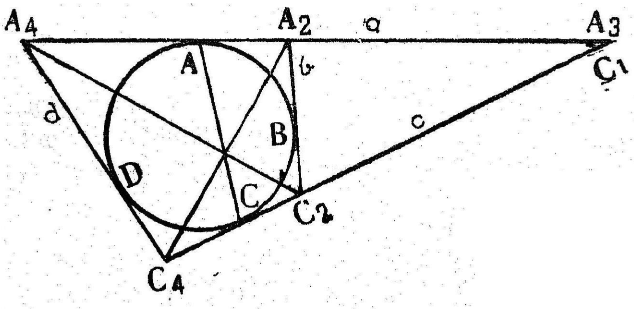
a, b, c, d வட்டத்தை *A, B, C, D* யில் தொடுகின்றன.

படத்தில் *ab, cd A, bd* ; *D, ac* கோடுகள் *P* என்னும் ஒரு புள்ளி வழியே செல்வதைக் காணலாம். இத்தேற்றத்திற்குத் தனி நிரூபணம் இல்லாமலேயே இருபான்மை நெறித் தத்துவத்தின்படி இது உண்மை எனக் கொள்ளலாம்.



படம் 49

2. a, b, c, d ஒரு வட்டத்தைத் தொடும் ஹார்மோனிக் வட்டத்தொடு கோடுகள். அவை வட்டத்தை A, B, C, D என்னும் புள்ளிகளில் தொடுகின்றன. AC, ad, bc இவற்றைச் சேர்க்கும் கோடு, ab, ba, இவற்றைச் சேர்க்கும் கோடு இவை ஒரு புள்ளி வழிக்கோடுகள் என நிரூபிக்கவும்.



படம் 50

கொள்கை : (1) a, b, c, d ஒரு வட்டத்தை A, B, C, Dயில் தொடுகின்றன.

(2) அவை ஹார்மோனிக் வட்டத் தொடு கோடுகள்.

(3) b, c, d இவை a யை A_2, A_3, A_4 என்னும் புள்ளிகளில் வெட்டட்டும். a, b, d இவை c யை C_1, C_2, C_3 என்னும் புள்ளிகளில் வெட்டட்டும்.

நிருபிக்க : $A_2 C_4$, A, C, $A_4 C_2$, ஒரு புள்ளி வழிக்கோடுகள் **என,**

நிருபணம்: a யை, b, c, d என்பன A_2, A_3, A_4என்னும் புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன a Aயில் தொட்ட கோட்டை வெட்டும் புள்ளி ஆகும்.

$(A\ A_2\ A_3\ A_4) = -1.$

அது போலவே,

$(C_1\ C_2\ C_3\ C_4) = -1.$

குறிப்பு: (a,b,c,d) என்பது C யை வெட்டும் புள்ளிகளை வரிசையாக எழுதியிருப்பதைக் கவனிக்கவும்)

இவற்றில் C_1; A_3 ஒரே புள்ளி.

ஆகவே $(A\ A_2\ A_3\ A_4)$ ஐ, A_3 யில் ஆரம்பிக்கும் சம குறுக்கு விகிதத்தை எழுத.

$$(A\ A_2\ A_3\ A_4) = (A_3 A_4 A A_2)$$
$$= (C_1\ C_2\ C\ C_4)$$

A_3 யும் C_2ம் ஒரே புள்ளியாகையால், ஒத்த புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிக் **கோடுகள்.**

$\therefore$ $C_2 A_4$, CA, $C_4 A_2$ இவை ஒரு புள்ளிக் கோடுகள்.

குறிப்பு **:** ஒரு வட்டத்தில் இரண்டு ஒன்றின்மேல் ஒன்று பொருந்தும் புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோடு அந்தப் புள்ளியில் தொடுகோடு.

AA, A யில் தொடுகோடு.

இதன் இருபான்மை நெறிப் பண்பு, ஒரு வட்டத்தில் ஒன்றின்மேல் ஒன்று பொருந்தும் இரண்டு தொடுகள் வெட்டும் புள்ளி, அவை வட்டத்தைத் தொடும் புள்ளுயாகும்,

$-aa$, a யின் தொடுபுள்ளி.

பயிற்சி-5 (a)

1. கீழ்க்கண்டவற்றின் இருபான்மை நெறித் தேற்றத்தை எழுதுக.

(a) 4 கோடுகள் 6 புள்ளிகளில் சந்திக்கின்றன.

(b) வட்டத்தின் தொடுகோடுகள் அதன் மையத்திலிருந்து சம தூரத்திலுள்ளவை.

(*c*) P, முக்கோணம் ABC யின் தலத்தில் (Plane) ஒரு புள்ளி. AP, BP, CP இவை எதிர்ப்பக்கங்களை D, E, F இல் சந்திக்கின்றன. EF, BC ஐ D இல் சந்திக்கிறது. $(BC, DD_1) = -1$

2. A, B, C, D ஹார்மானிக் வட்டப் புள்ளிகளானால், B யில் தொடுகோடு, BC, BD, BA இவை ஒரு இசைக் கோட்டுக் கற்றை எனக் காட்டுக.

பயிற்சி–5 (b)

1. AB ஒரு வட்டத்தின் விட்டம்; CD அதற்குச் செங்குத்தான ஒரு நாண். P வட்டத்தில் ஏதாவது ஒரு புள்ளியானால், PC, PD இவை PA, PB யின் இசைத் துணைக் கோடுகள் என நிரூபிக்க.

2. A,R,B, Q ஒரு வட்டத்தில் 4 புள்ளிகள். QT ஒரு தொடுகோடு, $Q\,(A,R,BT)$ ஹார்மோனிக் கற்றை. QP, ABக்கு இணையான நாண். PR, AB யை இரு சமக் கூறிடுகிறது என நிரூபிக்க.

3. $\triangle\ AB$யில் AD, BE, CF குத்துக் கோடுகள், FD, $\triangle\ BCE$ இன் சுற்று வட்டத்தை R இல் வெட்டுகிறது அந்தவட்டத்துக்கு வரையப்பட்ட தொடுகோடுBC யை T யில் சந்திக்கிறது. ER BCயை X இல் சந்திக்கிறது. $(BXCT) = -1$ என நிரூபிக்க.

4. A,B,C,D ஹார்மோனிக் வட்டப் புள்ளிகள். கீழ்க்கண்ட புள்ளிகள் ஒரு நேர்கோட்டிலுள்ளன என நிரூபிக்கவும்.

(1) A, B யில் தொடுகோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி; AC, BD;, AD; BC இவை வெட்டும் புள்ளிகள்.

(2) A,C யில் தொடுகோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி. AD, BC; AB, CD இவை சந்திக்கும் புள்ளிகள்.

(3) A, D யில் தொடுகோடுக சந்திக்கும் புள்ளி; AC, BD, AB, CD இவை சந்திக்கும் புள்ளிகள்.

(4) A,; D, B,C இவற்றில் தொடுகோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளிகள்; AC, BD இவை சந்திக்கும் புள்ளிகள்.

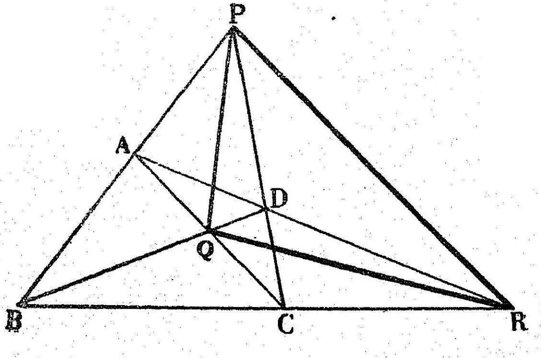
(5) இன்னும் ஒரு கோடமை புள்ளிகள். இருந்தால் கண்டுபிடித்து எழுதுக.

5. a, b, c, d ஹார்மோனிக் வட்டத் தொடு கோடுகள். அவற்றில் a வட்டத்தை A யில் தொடுகிறது. a யை b, c, d A_2 A_3, A_4 என்னும் புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. $(AA_2, A_3 A_4) = -1$ என நிருபிக்கவும்.

6. AB, BC, CD, DA ஒரு வட்டத்தை A', B', C', D' என்னும் புள்ளிகளில் தொடுகின்றன. அவை ஹார்மோனிக் வட்டத்தொடுகோடுகள். AB, CD, E யில் சந்திக்கின்றன. BC, $B'C'$, AD ஒரு புள்ளி வழிக்கோடுகள் என நிருபிக்க.

7. a, b, c, d ஹார்மோனிக் வட்டத் தொடுகோடுகள். அவை வட்டத்தை A, B, C, D யில் தொடுகின்றன. A, bd இவற்றை இணைக்கும் கோடு, D, ac இவற்றை இணைக்கும் கோடு, ab, cd இவற்றை இணைக்கும் கோடு இவை மூன்றும் ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள் என நிறுவுக.

8. a, b, c, d ஹார்மோனிக் வட்டத்தொடு கோடுகள். அவை வட்டத்தை முறையே A, B, C, D என்னும் புள்ளிகளில் தொடுகின்றன. AB; ac, bd இவற்றைச் சேர்க்கும் கோடு, ad, bc இவற்றைச் சேர்க்கும் கோடு இவை ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள் என நிறுவுக.



படம் 51

முழு நாற்கரமும் முழு நாற்கோணமும்

எந்த மூன்று புள்ளிகளும் ஒரு கோடமையாத நான்கு புள்ளிகள் சேர்ந்து ஒரு முழு நாற்கோணமாகும்.

A, B, C, D என்பன 4 புள்ளிகள்.

(1) A, B, C, D ஒரு முழு நாற்கோணம்.

(2) A, B, C, D உச்சிப் புள்ளிகள் (Vertices).

(3) இரண்டு புள்ளிகளைச் சேர்ப்பது ஒரு பக்கம். இங்கு AB, BC, CD, ACD, AC, BD என்று 6 பக்கங்கள் இருப்பதைக் காணலாம்.

(4) பொதுவான ஒரு புள்ளி இல்லாத பக்கங்கள் எதிர்ப் பக்கங்கள் எனப்படும்.

இங்கு AB, CD; AC, BD; AD, BC என 3 ஜதை எதிர்ப்பக்கங்கள் இருப்பதைக் காணலாம்.

(5) எதிர்ப்பக்கங்கள் சந்திக்கும் புள்ளி மூலைப் புள்ளி எனப்படும்.

இங்கு AB, CD, P யில் சந்திக்கின்றன.
AC, BD, Q இல் சந்திக்கின்றன.
AD, BC, R இல் சந்திக்கின்றன.
P, Q, R மூலைப் புள்ளிகள்.
ஒரு முழு நாற்கோணத்தில் 3 மூலைப்புள்ள்கள் உண்டு.

(6) மூலைப் புள்ளிகளாலாகிய முக்கோணம் மூலைப்புள்ளி முக்கோணம் எனப்படும்.

இங்கு PQR மூலைப்புள்ளி முக்கோணம்.

எந்த மூன்று கோடுகளும் ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லாத நான்கு கோடுகளாலானது முழு நாற்கரம். கோடுகளை a, b, c, d எனக் குறிப்போம்.

(1) a, b, c, d ஒரு முழு நாற்கரம்.

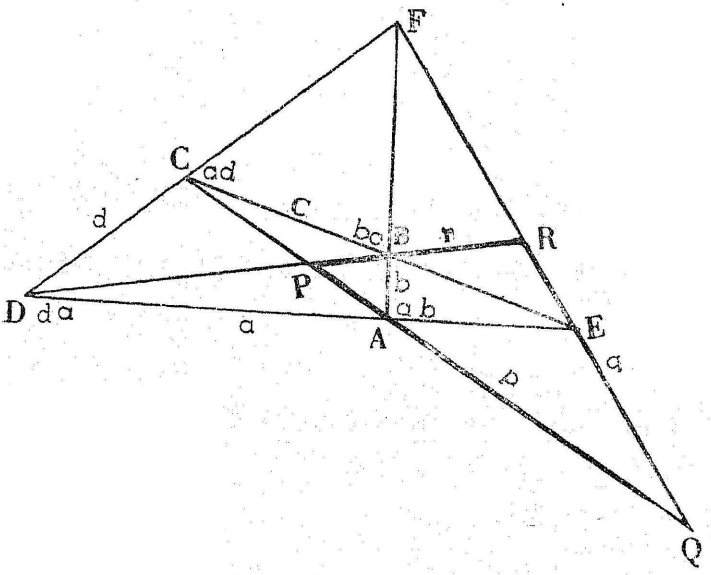
(2) a, b, c, d முழு நாற்கரத்தின் பக்கங்கள்.

(3) இரண்டு பக்கங்கள் சந்திப்பது ஒரு உச்சிப் புள்ளி. இங்கு 6 உச்சிப் புள்ளிகுள் உண்டு. A, B; C, D, E, F என்று குறிக்கப்பட்ட ab, bc, cd, da, ac, bd 6 உச்சிப் புள்ளிகள். இரண்டு பக்கங்கள் ஒரு உச்சிப் புள்ளியில் சந்தித்தால் அந்த புள்ளியும், மற்ற இரண்டு பக்கங்களும் சந்திக்கும் உச்சிப்புள்ளி யும் எதிர் உச்சிப்புள்ளிகள் எனப்படும்.

இங்கு A, C; B, D ; E, F அல்லது ab, cd ; ac, bd; ad, bc என்ற ஜதைகள் எதிர் உச்சிப் புள்ளிகள்.

(5) இரண்டு எதிர் உச்சிப் புள்ளிகளைச் சேகரிக்கும் கோடு மூலைவிட்டம் எனப்படும். இங்கு AC, BD, EF என்னும் மூன்று மூலைவிட்டங்கள் உள்ளன.

(6) மூலைவிட்டங்களாலாகிய முக்கோணம் மூலைவிட்ட முக்கோணம் எனப்படும். *BD*, *AC*, *EF* ஆலானது *PQR* என்ற முக்கோணம்.



படம் 52

ab, *cd* யை இணைக்கும் கோடு *p*,
ac, *bd* யை இணைக்கும் கோடு *q*,
ad, *bc* யை இணைக்கும் கோடு *r*
என்றால், *p*, *q*, *r* ஆலானது மூலைவிட்ட முக்கோணம்.

முழு நாற்கோணம் முழு நாற்கரம் இவற்றின் இருபான்மை நெறித் தத்துவம்

நாற்கோணம்	நாற்கரம்
1. எவையேனும் 3 நேர் கோட்டிலில்லாத 4 புள்ளிகள் கொண்டது ஒரு முழு நாற்கோணம்	எவையேனும் 3 ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லாத 4 கோடுகளால் ஆனது முழு நாற்கரம்
2. இந்த 4 புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் பக்கங்கள் 6	இந்த 4 கோடுகளும் சேரும் உச்சிப் புள்ளிகள் 6
3. 6 பக்கங்களில் 3 ஜதை எதிர்ப் பக்கங்கள் உண்டு.	6 உச்சிப் புள்ளிகளில் 3 ஜதை எதிர் உச்சிப் புள்ளிகள் உண்டு
4. எதிர்ப் பக்கங்கள் சந்திப்பது மூலைப் புள்ளியில்	எதிர் உச்சிப் புள்ளிகளைச் சேர்ப்பது மூலைவிட்டம்
5. மூலைப்புள்ளிகளாலான முக்கோணம் மூலைப் புள்ளி முக்கோணம்	மூலைவிட்டங்களாலான முக்கோணம் மூலைவிட்ட முக்கோணம்

இவற்றின் ஹார்மோனிக் பண்புகளைப் பற்றி இப்பொழுது பார்ப்போம்.

தேற்றம் 11

ஒரு முழு நாற்கோணத்தில் மூலைப்புள்ளி முக்கோணத்தின் ஒரு உச்சியில் சந்திக்கும் மூலைப்புள்ளி முக்கோணத்தின் இரண்டு பக்கங்களும் அதே உச்சி வழிச் செல்லும் முழு நாற்கோணத்தின் இரண்டு எதிர்ப் பக்கங்களும் சேர்ந்து ஒரு இசைக்கோட்டுக் கற்றையாகும்.

கொள்கை: (1) A, B, C, D ஒரு முழு நாற்கோணம்.

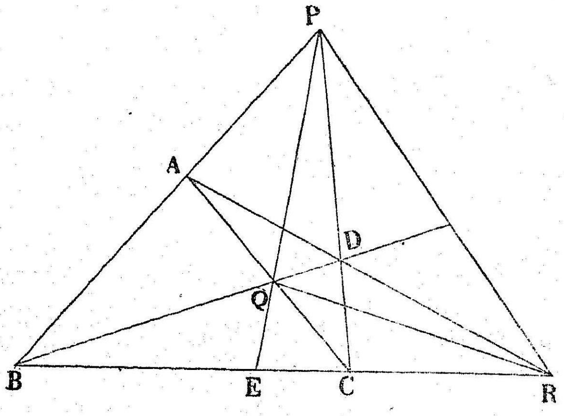
(2) PQR நாற்கோணத்தின் மூலைப் புள்ளி முக்கோணம்.

நிரூபிக்க: $P(A, Q, D, R)$ ஒரு இசைக்கோட்டுக் கற்றை என.

நிருபணம்: PQ வை, BC யை E யில் சந்திக்குமாறு நீட்டுக.

△ PBC யில் PE, BD, AC ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள்.

$$\therefore \quad \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CD}{DP} \cdot \frac{PA}{AB} = +1. \qquad \text{(சீவாவின் தேற்றம்)}$$



படம் 53

△ PBC யில் AD, BC யை R இல் சந்திக்கிறது.

$$\therefore \quad \frac{BR}{RC} \cdot \frac{CD}{DP} \cdot \frac{PA}{AB} = -1. \qquad \text{(மெனிலாஸ் தேற்றம்)}$$

$$\therefore \quad \frac{BE}{EC} = -\frac{BR}{RC}.$$

$$\therefore \quad (BECR) = -1.$$

$$\therefore \quad P\,(BECR) = -1.$$

வரையறை

இது போலவே $R(BQAB) = -1$

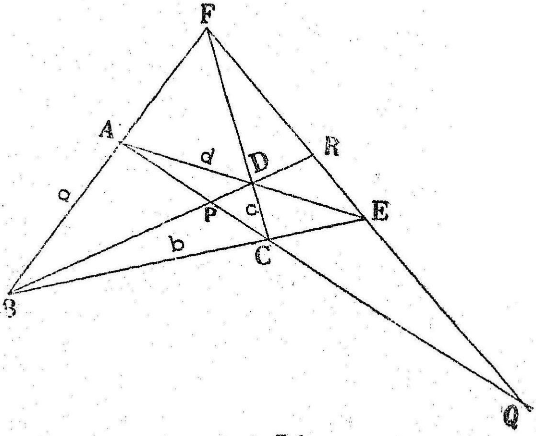
$Q(CRDP) = -1$

△ PQR முழு நாற்கோணத்தின் ஹார்மோனிக் முக்கோணம் எனப்படும்

மேற்கண்ட தேற்றத்தின் இருபான்மைத் தேற்றத்தைச் சொல்வோம்.

ஒரு முழு நாற்கரத்தில் மூலை விட்ட முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கத்தில் இருக்கும் 2 உச்சிகளும், அதே பக்கத்தில் உள்ள நாற்கரத்தின் இரண்டு எதிர் உச்சிப் புள்ளிகளும் சேர்ந்து ஒரு இசைப் புள்ளி வரிசையாகும்.

a, b, c, d அல்லது *AB, BC, CD, DA* என்னும் பக்கங்கள் கொண்டது முழு நாற்கரம். *A,B,C,D,E,F* உச்சிப் புள்ளிகள்,



படம் 54

PQR மூலை விட்ட முக்கோணம். *PR* அதன் ஒரு பக்கம்— *PR* இல் உள்ள நாற்கரத்தின் எதிர் உச்சிப்புள்ளிகள் *B,D*, மேற்படி தேற்றப்படி *BD,PR* இசைப் புள்ளி வரிசை ஆகும்.

இதையே *BD* யை *P,R* இசையாகப் பிரிக்கிறது என்றும் சொல்லலாம் அல்லவா? *P, R* என்னும் புள்ளிகள் *BD* யை மற்ற இரண்டு மூலை விட்டங்களும் வெட்டும் புள்ளிகள். ஆகவே ஒவ்வொரு மூலைவிட்டத்தையும், மற்ற இரண்டு மூலைவிட்டங்களும் ஹார்மோனிக்காக அல்லது இசையாகப் பிரிக்கிறது என்றும் மேற்கண்ட தேற்றத்தைச் சுருக்கமாகச் சொல்லலாம்.

தேற்றம் 12

ஒரு முழு நாற்கரத்தின் ஒவ்வொரு மூலைவிட்டத்தையும் மற்ற இரண்டு மூலைவிட்டங்களும் இசையாகப் பிரிக்கின்றன.

கொள்கை : (1) *AB, BC, CD, DA* முழு நாற்கரத்தின் பக்கங்கள்.

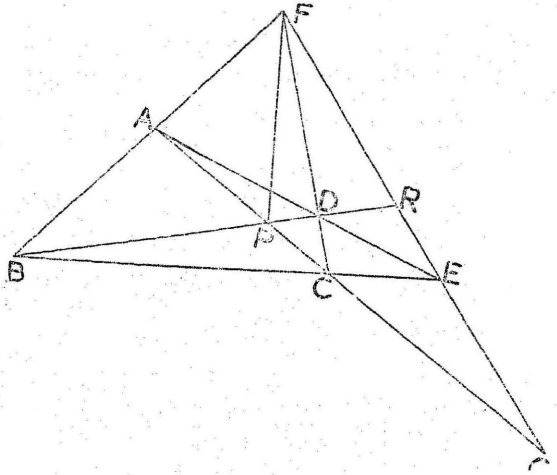
(2) *PQR* மூலை விட்ட முக்கோணம்.

திருபிக்க : (1) *AC* யை *P,Q* இசையாகப் பிரிக்கின்றன.

(2) *BD* யை *P,R* இசையாகப் பிரிக்கின்றன.

(3) *EF* ஐ *Q, R* இசையாகப் பிரிக்கின்றன.

நிருபணம் : $\triangle FBE$ யில், FC, BR, EA ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள்.



படம் 55

$$\therefore \frac{FA}{AB} \cdot \frac{BC}{CE} \cdot \frac{ER}{RF} =$$

AC, EF ஐ Qவில் வெட்டுகிறது.

$$\therefore \frac{FA}{AB} \cdot \frac{BC}{CE} \cdot \frac{EQ}{QF} \cdot = -1$$

$$\therefore \frac{ER}{RF} = -\frac{EQ}{QF}.$$

$\therefore$ EF ஐ R, Q இசையாகப் பிரிக்கின்றன.

அதே மாதிரி BD ஐ P, R இசையாகப் பிரிக்கின்றன.

அதே மாதிரி AC ஐ P, Q இசையாகப் பிரிக்கின்றன.

மாற்று நிருபணம் : A, B, C, D என்றும் முழு நாற்கோணத்தில் $F(BPCE) = -1$. (தேற்றம் 11)

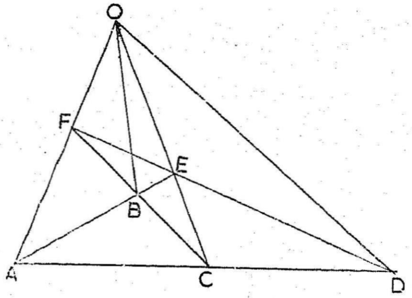
இதை BD என்னும் குறுக்கு வெட்டி $BPDR$ என்னும் புள்ளி வரிசையில் வெட்டுகிறது. (தேற்றம் 5)

$\therefore$ $(BPDR) = -1$

அதேமாதிரி, $(APCQ), = -1$
$A\ (FREQ), = -1$
என்று நிரூபிக்கலாம்.

வரையறை : $\triangle\ PQR$ முழு நாற்கரத்தின் இசை முக்கோணம் அல்லது ஹார்மோனிக் முக்கோணம் எனப்படும்.

மூன்று ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள் கொடுத்தால் நான்காவது இசைக்கோடு, (அளவுகோல் மட்டும் உபயோகித்து) வரைய.



படம் 56

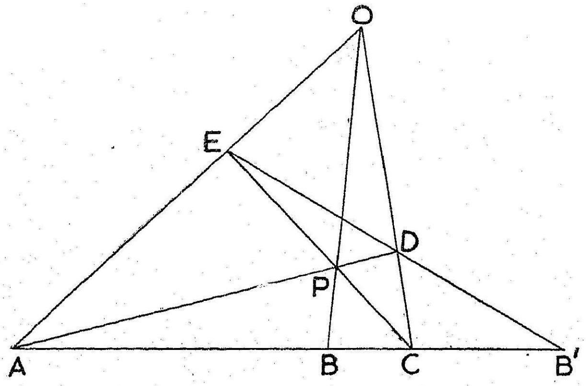
கொள்கை : (1) OA, OB, OC என்பன மூன்று கோடுகள்,
வரைய வேண்டியது : 4 வது இசைக்கோடு.
வரைமுறை : OB யில் B என்னும் ஒரு புள்ளி குறிக்க.
B வழியே AE, FC என்னும் கோடுகள் முறையே OA, OC யை A, E யிலும், F, C யிலும் வெட்டுமாறு வரைக.
FE, AC யைச் சேர்த்து நீட்டுக.
அவை D யில் வெட்டட்டும்.
OD யைச் சேர்க்க.
OD தான் கேட்கப்பட்ட கோடு.

நிரூபணம் : A, C, E, F ஒரு முழு நாற்கோணம். அதில் O, D, B மூலைப் புள்ளிகள்.
$\therefore\ O\ (ABCD) = -1$ (தேற்றம் 11)
$\therefore\ OB, OD$ இவை DA, OC க்கு இசைத் துணைக்கோடுகள்.

மூன்று புள்ளிகள் கொடுத்திருந்தால் அளவுகோல்மட்டும் உபயோகித்து அவற்றின் நான்காவது இசைப் புள்ளி கண்டு பிடிக்க.

கொள்கை : A,B,C மூன்று ஒரு கோடமை புள்ளிகள்.

கண்டுபிடிக்க ; நான்காவது இசைப்புள்ளி.



படம் 57

வரைமுறை : A,B,C யை வெளியே ஒரு புள்ளி O வுடன் சேர்க்கவும்.

OBயில் P என்னும் ஒருபுள்ளி குறிக்க. AP,CA யைச்சேர்த்து அவை OC, OA யை, D,E யில் வெட்டும்படி வரைக.

ED யைச் சேர்த்து ABC யை B' இல் வெட்டும்படி தீட்டுக.

B'தான் கேட்கப்பட்ட புள்ளி.

நிருபணம் : A,C,D,E என்னும் முழு நாற்கோணத்தில் O, P, B' மூலைப் புள்ளிகள்.

$\therefore$ OA,OC என்னும் பக்கங்களும் மூலைப் புள்ளிமுக்கோணத்தின் பக்கங்கள். OP, OB' உம் இசைக்கோட்டுக் கற்றையாகும்.

$\therefore$ $O(ABCB') = -1$.

$\therefore$ $(ABCB') = -1$.

மாதிரி

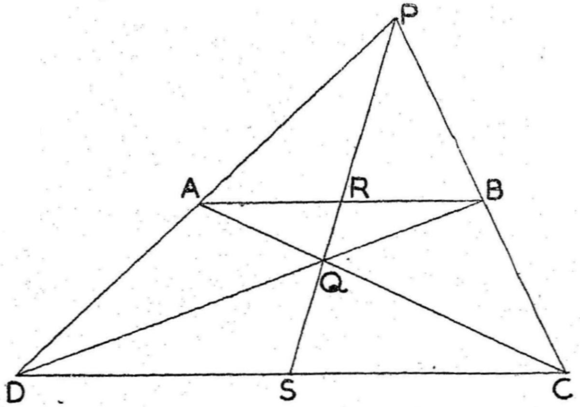
1. $ABCD$ ஒரு டிரெபீஸியம்; AB, CD க்கு இணை. AD, BC, P யிலும், AC, BD, Q விலும் வெட்டுகின்றன. PQ, AB யை R இலும் CDயை Sஇலும் வெட்டுகிறது. $(PQ,RS) = -1$ எனவும், $AR = RB$ எனவும் நிறுவுக.

கொள்கை : (1) $ABCD$ டிரெபிஸியம்; $AB \parallel CD$.

(2) AD, BC, P யில் சந்திக்கின்றன.

(3) AC, BD, Q வில் சந்திக்கின்றன.

(4) AB, CD யை PQ என்பது R,S இல் சந்திக்கிறது.



படம் 58

நிரூபிக்க (1) $(PRQS)=-1$ எனவும்

(2) $AR=RB$ எனவும்.

நிருபணம் : A, B, C, D முழு நாற்கோணம் எனக்கொள்க. AB, CD எட்டாப் புளியில் வெட்டுகின்றன. அதை $X\infty$ என்போம்.

$PQX\infty$ $ABCD$ யின் இசை முக்கோணம்.

$\therefore X\infty (P,A,Q,C,)$ இசைக் கோட்டுக் கற்றை (தேற்றம் 11)

$\therefore$ $(PRQS)=-1$ (தேற்றம் 5)

மேலும் P வழிச் செல்லும் கோடுகள்

$P(A,Q,B, X\infty)$ இசைக்கோட்டுக் கற்றை.

$\therefore P(ARBX\infty)=-1$. ஆனால் $PX\infty$, AB க்கு இணைகோடு.

$\therefore$ $AR=RB$. (தேற்றம் 5 கிளை)

பயிற்சி-6 (a)

1. $\triangle ABC$ யில் DE, AB யை D யிலும், AC யை E யிலும், BC யை F இலும் வெட்டுகிறது. BE யும் CD யும் G யில் வெட்டுகின்றன. $A(BC, GF)=-1$ என நிரூபிக்கவும்.

2. $\triangle ABC$யில் DEF என்னும் நேர்கோடு AB, BC, CA வை முறையே D, E, F இல் வெட்டுகிறது. BF, CD யை P யிலும், AF யை Q விலும் வெட்டுகின்றது

$(BPFQ) = -1$ என்று நிருபிக்கவும்.

3. ஒரு முழு நாற்கோணம் A, B, C, Dயில் AB, CD என்பன E யிலும், AC, BD என்பன G யிலும், AD, BC என்பன F இலும் வெட்டுகின்றன. EG, ADயை P யிலும், BC யை Q விலும் வெட்டுகிறது. $(APDF) = (BQCF) = -1$என நிருபிக்கவும்.

4. முழு நாற்கோணம் A, B, C, D யில் E, F, G மூலைப்புள்ளிகள். AC, BD இவை வெட்டும்புள்ளி $G.AC$, FEக்கு இணையானால் $AG = GC$ என நிருபிக்கவும்.

5. முழு நாற்கரம் AB, BC, BD, DA யில், AB, CD, E யிலும், AD, BC, F இலும் வெட்டுகின்றன. EF, AC யை R இல் சந்திக்கிறது. RD, AB யை X இல் வெட்டுகிறது. $(EX\ AB) = -1$ என நிருபிக்கவும்.

பயிற்சி-6 (b)

1. கொடுக்கப்பட்ட ஒரு புள்ளி வழியே, $\triangle ABC$ யின் பக்கங்களை இசைப்புள்ளி வரிசையில் வெட்டும்படி ஒரு கோடு வரைக.

2. ஒரு நாற்கோணத்தின் மூலைப்புள்ளி முக்கோணமும் ஒரு உச்சிப் புள்ளியும் கொடுத்திருந்தால், நாற்கோணத்தை வரைக.

3. AB, BC, CD, DA ஒரு முழு நாற்கரம். $\triangle PQR$ இசை முக்கோணம். BD, AC, P யில் வெட்டுகின்றன. P வழியாக BC க்கு இணையாக ஒரு கோடு QR யை K யில் வெட்டுகிறது. PK யை DE இரு சமக்கூறிடுகிறது என்று நிருபிக்க.

4. A, B, C, D ஒரு முழு நாற்கோணம். EFG அதன் இசை முக்கோணம். $\triangle EF, G$யின் பக்கங்கள் $ABCD$ யின் பக்கங்களை P_1, P_2, Q_1; Q_2, R_1; R_2 என்னும் புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன. $P_1, P_2, Q_1, Q_2, R_1, R_2$ என்னும் 6 புள்ளிகளும் $\triangle EFG$ யை இசை முக்கோணமாகக் கொண்ட ஒரு முழு நாற்கரத்தின் உச்சிப் புள்ளிகள் என்று காட்டுக.

5. A, B, C ஒரு கோடமை புள்ளிகள். PQ, A வழியே செல்லும் ஏதாவது ஒரு கோடு. PB, QC, X இலும், PC, QB, D இலும் வெட்டுகின்றன. XY, BC யை D யில் வெட்டுகிறது. D ஒரு நிலையான புள்ளி என நிருபிக்கவும்.

பயிற்சிகள் செய்யச் சில குறிப்புகள்

I. ஒரு நேர்கோட்டை இரு புள்ளிகள் ஹார்மோனிக்காக அல்லது இசையாகப் பிரிக்கிறதா என்று பார்க்க

நேர்கோடு AB, புள்ளிகள் C, D என்போம்.

1. $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{AD}{BD}$ இருக்கிறதா என்று பார்க்க.

(2) ஒரு இசைக் கோட்டுக் கற்றையை ஒரு குறுக்கு வெட்டி வெட்டும் புள்ளிகள் A, B, C, D யா என்று பார்க்க.

(3) ஒரு வட்டத்தின் விட்டமும் அதன் ஒரு புள்ளியும் இருந்தால் மற்றப் புள்ளி அந்தப் புள்ளியின் தொடு கோடு விட்டத்தை வெட்டும் புள்ளியா என்று பார்க்க.

(4) ஒரு கோணத்தின் உட்புற, வெளிப்புற இருசம வெட்டிகள் உண்டா என்று பார்க்க. அந்த இசைக் கோட்டுக் கற்றையை ஒரு குறுக்கு வெட்டி A, B, C, D யில் வெட்டுகிறதா என்று பார்க்க.

(5) $\triangle$ ABC யில் AA_1, BB_1, CC_1 ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகளானல், B_1C_1, BC யை A_2 வில் வெட்டினல் $(BC, A_1 A_2) = -1$. இதை உபயோகிக்கலாம்.

(6) ஒரு முழு நாற்கோணத்தின் மூலைப்புள்ளியில் இருக்கும் இசைக் கோட்டுக் கற்றையை வெட்டும் குறுக்கு வெட்டியில் A, B, C, D உண்டா என்று பார்க்க.

(7) ஒரு நாற்கரத்தின் மூலைவிட்டமாக என்று பார்க்க.

II. ஒரு ஹார்மோனிக் கற்றையை வெட்டும் குறுக்கு வெட்டியில் விழும் துண்டுகள் சமம். ஆகையால் ஒரு நேர் கோட்டில் உள்ள அடுத்த இரண்டு துண்டுகள் சமம் என்று நிரூபிக்க அல்லது ஒரு நேர்கோடு இருசமக் கூறிடப்படுகிறது என்று நிரூபிக்க.

(1) அந்தக் கோடு ஒரு இசைக்கோட்டுக் கற்றையை வெட்டுகிறதா என்று பார்க்க.

(2) வெட்டினல், அது கற்றையின் ஒரு கோட்டுக்கு இணையா என்று பார்க்க.

III. 3 கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள் என்று நிரூபிக்க.

ஒரு புள்ளி பொதுவாக உள்ள இரண்டு இசைப்புள்ளி வரிசைகள் உள்ளனவா என்று பார்க்க. மற்ற 3 ஜதை புள்ளிகளையும் இணைக்கும் கோடுகள் கொடுக்கப்பட்ட கோடுகளா என்று பார்க்க.

குறிப்பு : ஹார்மோனிக் வரிசைகளைச் சம குறுக்கு விகிதங்களை உடயோகித்து மாற்றி எழுதிக் கொள்ளலாம்.

$(ABCD) = -1$ } என்று கொடுக்கப்பட்டால்
$(APQR) = -1$ } அல்லது தெரிந்தால்

BP, CQ, DR ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள். இவை கொடுக்கப்பட்ட கோடுகள் இல்லை என்றால் $(APQR)$ க்குச் சமமான மற்றக் குறுக்கு விகிதங்களை A யை மாற்றினல் எழுதிப் பார்க்கலாம்.

(உ-ம்) இரண்டாவது, நான்காவது எழுத்துக்களை மாற்ற கிடைப்பது $\frac{1}{\lambda}$. இங்கே இது $= -1$.

$\therefore \ (ARQP) = -1$.

$\therefore$ BR, CQ, PD ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள்.

IV. 3 புள்ளிகள் ஒரு கோடமை புள்ளிகள் என நிரூபிக்க.

(1) 2 இசைக் கோட்டுக் கற்றைகளில் ஒரு ஜதை ஒத்த கோடு பொதுவாக இருக்க வேண்டும்.

(2) மற்ற 3 ஜதை ஒத்த கோடுகள் வெட்டும் புள்ளிகள் கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளா என்று பார்க்க.

V. ஒரு வட்டத்தில் 4 ஹார்மோனிக் வட்டப் புள்ளிகள் இருந்தால் அவற்றைக் கொண்டு $A\ (ABCD) = -1$, $A\ (BACD) = -1$, $B\ (ABCD) = -1$ முதலிய சம குறுக்கு விகிதங்கள் கிடைக்கும். இதைக் கொண்டு ஒரு கோடமை புள்ளிகள் 3, 3 ஆகக் கிடைக்கும்.

இதில் ஒரு ஜதை ஒத்த கோடுகள் பொதுவாக இருக்கும் படியும் 3 ஜதை ஒத்த கோடுகள் கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளில் வெட்டும்படியும் இசைக் கோட்டுக் கற்றைகளைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும்.

(உ-ம்) $A(ABCD) = -1$ என்பதும், AB, DC வெட்டும் புள்ளியும் கொடுத்திருந்தால் கீழே குறிப்பிட்டபடி எழுதவும்.

AA, AB, AC, AD, DC,

AB க்கு ஒத்த கோடு DC. ∴ அதை AB க்குக் கீழே எழுதவும் $(ABCD)$ யில், B க்கு பதில் C இருக்கும் சமகுறுக்கு விகிதம் $(DCBA)$.

இரண்டாவது கோடு DC யாக இருக்க வேண்டும் என்றல் கோட்டுக் கற்றை $D(DCBA)$ ஆக இருக்க வேண்டும். $D(DCBA) = -1$. இப்பொழுது இக்கோட்டுக் கற்றையில் உள்ள கோடுகளைக் கீழ்க் கண்டவாறு எழுதவும்.

AA, AB, AC, AD,
DD, DC, DB, DA.
இவற்றில் AD பொது.

கொடுக்கப்பட்ட மற்ற இரண்டு புள்ளிகளும், A, D யில் தொடு கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி; AC, DB சந்திக்கும் புள்ளி இவைகளா என்று பார்க்க.

பயிற்சி 7

(பலவகைக் கணக்குகள்) (Miscellaneous Exercises)

1. △ ABC யில் AA_1, BB_1, CC_1 ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள். B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 முறையே BC, CA, AB யை A_2, B_2, C_2 வில் வெட்டுகின்றன.

$(BA_1\ CA_2)$. $(CB_1\ AB_2)$. $(AC_1\ BC_2) = -1$ என நிரூபிக்க.

2. △ ABC யில், A க்கு எதிரேயுள்ள வெளி வட்டம் BC, CA, AB யை X_1, Y_1, Z_1 இல் தொடுகிறது. AB யை Z_2 இல் வெட்டுகிறது. $(AB, Z_1 Z_2) = -1$ என நிரூபிக்க.

3. இரண்டு வட்டங்கள் ஒரு நேர்கோட்டை A, B; C, D என்னும் புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன. $(ABCD) = -1$ ஆனல், ABC யிலிருந்து வட்ட மையங்களின் ஆரங்களின் பெருக்குத் தொகை நிலையானது என நிரூபிக்க.

4. △ ABC யில் AA_1, BB_1, CC_1 என்பன O வில் சந்திக்கின்றன. B_1C_1, BC யை A_2 வில் வெட்டுகிறது. CO வில் R மையப் புள்ளி. BB_1, A_1R இவை X இல் வெட்டுகின்றன. XA_2; CC_1 க்கு இணை என நிரூபிக்க.

O வழியாக ABக்கு இணையாக $A_1 C_1$ ஐ L இலும், $B_2\ C_1$ M இலும் வெட்டும்படி ஒரு கோடு வரையப்பட்டால், $OL = OM$ என நிரூபிக்க.

5. $\triangle ABC$ யில் S சுற்று வட்ட மையம், O குத்து மையம், I உள் வட்ட மையம். I_1, I_2, I_3, வெளி வட்ட மையங்கள். $A\ (SO, I, I_2) = B\ (SO, II_1) = C\ (SO, II_3) = -1$ என நிறுவுக.

6. O மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தில் BC ஒரு விட்டம். DE அதற்கு ஒரு செங்குத்து நாண். A வட்டத்தின் மேல் ஒரு புள்ளி. AD, AE என்பன, BC யை P, Q வில் சந்திக்கின்றன. $OP.OQ = R^2$ (R சுற்று வட்ட ஆரம்) என நிரூபிக்க.

A, B, C ஒரு நேர்கோட்டில் 3 புள்ளிகள். A', B', C' என்பன BC, CA, AB யை இசையாகப் பிரிக்கின்றன. AA', BB', CC விட்டமாகவுடைய வட்டங்கள் இரு புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன என்றும் அவற்றில் P ஒரு வெட்டுப் புள்ளியானுல் PA, PB, PC, $\angle BPC$, $\angle CPA$, $\angle ABP$ இவற்றை இருசமக் கூறிடுகின்றன என்றும் நிரூபிக்க.

8. $\triangle ABC$ யில் உள்ளே P, Q இரண்டு புள்ளிகள். AP, BP, CP பக்கங்கள் BC, CA, AB யை X_1, Y_1, Z_1 என்னும் புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன. AQ, BQ, CQ என்னும் கோடுகள், அதே பக்கங்களை D_1, E_1, F_1 என்னும் புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன. Y_1Z_1, BC யை X_2 விலும், F_1D_1, AC யை E_2 இலும் வெட்டுகின்றன. AX_2, BE_2 ஐ L இல் வெட்டுகிறது. AX_2, BE_2 ஐ M இல் வெட்டுகிறது. L, C, M ஒரு கோடமை புள்ளிகள் என நிரூபிக்க.

9. AB, BC, CD, DA ஒரு முழு நாற்கரம். அதன் இசை முக்கோணம் EFG. EFG யை இசைமுக்கோணமாகக் கொண்ட A_1, B_1, C_1, D_1 என்னும் நாற்கோணம் வரைந்தால் AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 சந்திக்கும் 6 புள்ளிகளில் இரண்டு E, F இலும் இரண்டு F, G யிலும், இரண்டு G, E யிலும் இருக்கும் என நிரூபிக்க.

10. ஒரு வட்டத்தில் P, Q, R, S இசை வட்டப் புள்ளிகள். PQ, RS; PR, QS; P, S இல் தொடுகோடுகள்; Q, R இல் தொடு கோடுகள் இவை வெட்டும் புள்ளிகள் ஒரு நேர்கோட்டில் ஒரு நேர்கோட்டில் அமையும் என நிறுவுக. (செ. ப)

11. முக்கோணம் ABC யின் பக்கம் BC நிலையானது. A ஒரு நிலைத்த நேர் கோட்டில் அமையும். மற்றொரு நிலைத்த நேர் கோடு AB, AC இவற்றை முறையே PQ வில் வெட்டு

கிறது. BQ, CP இவை வெட்டும் புள்ளியின் நியமப்பாதையும் ஒரு நிலைத்த நேர் கோட்டில் உள்ளது என நிருபிக்கவும்.
(செ. ப)

12. கொடுக்கப்பட்ட ஒரு புள்ளி O வழியே $\triangle ABC$ யின் பக்கங்கள் BC, CA, CA யை D, E, F என்னும் புள்ளிகளில் $(OD, EF) = -1$ இருக்குமாறு வரைக. (செ. ப)

13. $\triangle ABC$ யில், BC க்கு இணையாக வரையப்பட்ட ஒரு நேர்கோடு AB, AC யை முறையே P, Q வில் வெட்டுகிறது. CP, BQ, R இல் வெட்டினுல், AR, PQ வை இரு சமக் கூறிடுகிறது என நிருபிக்கவும். (செ. ப)

14. AB ஒரு வட்டத்தின் விட்டம். AP ஏதாவது ஒரு நாண். A, P யில் தொடு கோடுகள் O வில் சந்திக்கின்றன. R, P யிலிருந்து AB க்கு வரையப்பட்ட குத்துக் கோட்டின் அடி. BO, PQ ஐ இருசமக் கூறிடுகிறது என நிருபிக்கவும். (செ. ப)

15. A என்னும் நிலையான புள்ளி வழியே OC, OD என்னும் நிலையான கோடுகளை PQ வில் வெட்டும்படி ஒரு நேர்கோடு வரையப்படுகிறது. APQ வில் $\dfrac{1}{AR} = \dfrac{1}{AP} + \dfrac{1}{AQ}$ ஆக இருக்கும்படி R என்னும் புள்ளி குறித்தால், R இன் நியமப்பதை ஒரு நேர்கோடு என நிருபிக்கவும். (செ. ப)

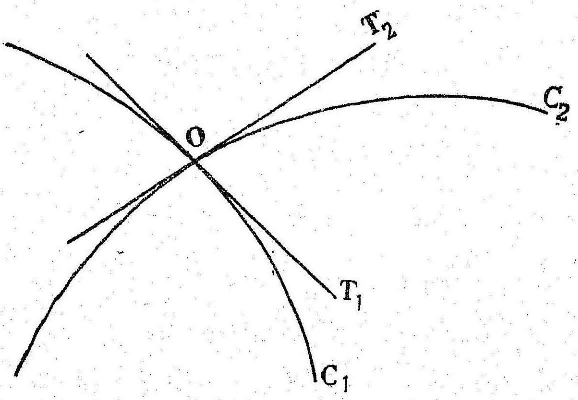
16. $\triangle ABC$ யில், A_1, B_1, C_1 முறையே A, B, C க்கு எதிர்ப் பக்கங்களில் உள்ள புள்ளிகள். A_2, B_2, C_2 என்னும் புள்ளிகள் அதன் பக்கங்களில், A_1, A_2, B, C க்கு இசைத் துணைப்புள்ளிகளாகவும் (Harmonic Conjugates), B_1, B_2— C, A க்கு இசைத் துணைப் புள்ளிகளாகவும்; C_1, C_2, —A,B க்கு இசைப்புள்ளிகளாகவும் உள்ளபடி அமைகின்றன. A_2, B_2, C_2 ஒரு கோடமை புள்ளிகளானுல், AA_1, BB_1, CC_1 ஒரு புள்ளி வழிக்கோடுகள் என நிருபிக்கவும். (செ. ப)

17. $\triangle ABC$ யின் உள் வட்டம் பக்கங்களை D, E, F இல் தொடுகிறது. EF, BC யை D' இல் வெட்டினுல் B, C என்னும் புள்ளிகள் DD_1 ஐ இசையாகப் பிரிக்கின்றன என நிருபிக்கவும்.
(செ. ப)

18. இரண்டு வட்டங்கள் A, B யில் வெட்டுகின்றன. மேலும் அவை ஒரு பொதுத் தொடு கோட்டை P, Q வில் தொடுகின்றன. மூன்ருவது ஒரு வட்டம் A, B வழியாகச் செல்கிறது. அது PQ வை L, M இல் வெட்டினுல், L, P, M, Q ஒரு இசைப் புள்ளி வரிசை என நிருபிக்கவும். (செ. ப)

II. வட்டங்கள்

இரண்டு வளைகோடுகளுக்கு இடையுள்ள கோணம் அல்லது இரண்டு வளைகோடுகள் வெட்டும் கோணம்



II படம் 1

இரண்டு வளைகோடுகளுக்கு இடையே உள்ள கோணம் அவை வெட்டும் புள்ளியில் அவற்றிற்கு வரையப்படும் தொடு கோடுகளுக்கு இடையேயுள்ள கோணமாகும். அதுதான் இரண்டு வளைகோடுகளுக்கும் வெட்டும் கோணம்.

C_1, C_2 என்பவை இரண்டு வளைகோடுகள். O அவை வெட்டும் புள்ளி.

OT_1, OT_2 அவற்றிற்கு O வழியே வரையப்பட்ட தொடு கோடுகள்.

$\angle T_1 OT_2$ இரண்டு வளைகோடுகளுக்கும் இடையே உள்ள கோணம்.

அதுவேதான் C_1, C_2 வெட்டும் கோணம். $\angle T_1 OT_2 = 90°$ என்றால், இரண்டு வளைகோடுகளும் குத்தாக (Orthogonal) வெட்டுகின்றன என்று சொல்கிறோம்.

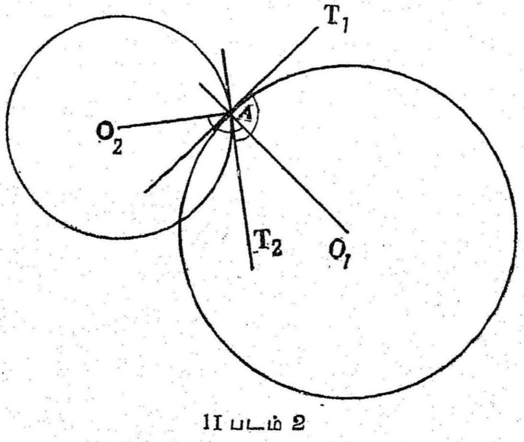
குறிப்பாக இரண்டு வட்டங்கள் 90° யில் வெட்டினால், அந்த வட்டங்களுக்குக் குத்து வட்டங்கள் என்று பெயர்.

குறிப்பு (1) O வை மையமாகவுடைய வட்டத்தை வட்டம் (O), அல்லது $\odot (O)$ என்று குறிப்போம்.

(2) AB யை விட்டமாகவுடைய வட்டத்தை வட்டம் (AB) அல்லது $\odot AB$ என்று குறிப்போம்.

தேற்றம் 13

இரண்டு வட்டங்கள் வெட்டும் கோணம் அவை வெட்டுப் புள்ளியில் சந்திக்கும் ஆரங்களுக்கிடையேயுள்ள கோணமாகும்.



II படம் 2

கொள்கை: (1) O_1, O_2 மையமாகவுடைய இரு வட்டங்கள் A யில் வெட்டுகின்றன.

(2) AT_1 முதல் வட்டத்திற்கும், AT_2 இரண்டாவது வட்டத்திற்கும் வரையப்பட்ட தொடுகோடுகள்.

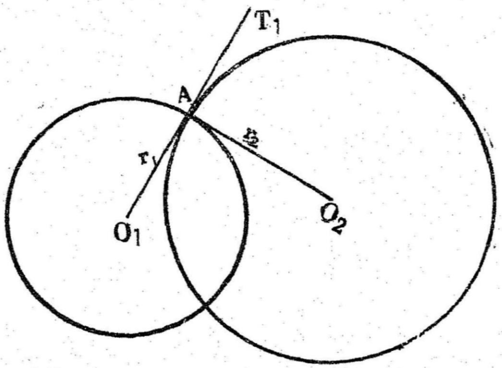
(3) $\angle T_1 AT_2$ வட்டங்கள் வெட்டும் கோணம்.

(4) $O_1 A$, $O_2 A$ வெட்டுப் புள்ளியில் சந்திக்கும் ஆரங்கள்.

நிரூபிக்க: $\angle O_1 AO_2 = \angle T_1 AT_2$ என.

நிருபணம் : AT_1 முதல் வட்டத்திற்குத் தொடுகோடு.
AO_1 ஆரம்.
∴ $T_1 A$, $O_1 A$ க்குக் குத்துக் கோடு.
AT_2 இரண்டாவது வட்டத்திற்குத் தொடுகோடு.
AO_2 ஆரம்.
∴ $T_2 A$, $O_2 A$ க்குக் குத்துக் கோடு.
∴ AT_1, AT_2 இவற்றுக்கு இடையேயுள்ள கோணம்
$= AO_1$, AO_2 இவற்றுக்கு இடையேயுள்ள கோணம்.
∴ $\angle T_1 AT_2 = \angle O_1 AO_2$.

குத்து வட்டங்கள் (Orthogonal Circles)



II படம் 3

O_1, O_2 இரண்டு குத்து வட்டங்களின் மையங்கள்; அவற்றின் ஆரங்கள் r_1, r_2.

$O_1 O_2 = d$.

அவை A யில் வெட்டுகின்றன. AT_1, வட்டம் (O_2) க்குத் தொடுகோடு.

இரண்டு வட்டங்களும் 90° யில் வெட்டிக் கொள்வதால் தேற்றம் 13 இன் படி $\angle O_1 A O_2 = 90°$. ஆனால் AT_1, வட்டம் (O_2) க்குத் தொடுகோடு.

∴ $\angle T_1 A O_2 = 90°$.

∴ AT_1, AO_2 இரண்டும் ஒரே நேர்கோடு. இதிலிருந்து தெரிவது,

$O_1 A$ வட்டம் (O_2) க்குத் தொடுகோடு. அது போலவே $O_2 A_1$, வட்டம் (O_1) க்குத் தொடுகோடு என்பதும் புலனாகிறது.

கிளை 1. வெட்டுப்புள்ளி வழியே வரையப்படும் ஒரு வட்டத்தின் ஆரம் மற்ற வட்டத்துக்குத் தொடுகோடு.

கிளை 2. குத்து வட்டங்களின் வெட்டுப்புள்ளி வழியே வரையப்படும் ஆரங்கள் செங்குத்துக் கோடுகள்.

கிளை 3. வெட்டுப்புள்ளி வழியே ஒரு வட்டத்துக்கு வரையப்படும் தோடுகோடு மற்ற வட்டத்தின் மையப் புள்ளி வழியே செல்லும். (அ-து) மற்ற வட்டத்துக்கு ஒரு ஆரம்.

கிளை 4. ஒரு வட்ட மையத்திலிருந்து அடுத்த வட்டத்துக்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டின் நீளம் அந்த வட்டத்தின் ஆரமாகும்.

5. $d^2 = r_1^2 + r_2^2$.

எப்பொழுது இரண்டு வட்டங்கள் குத்து வட்டங்களாகும்?

6. இரு வட்டங்கள் வெட்டிக் கொண்டால் வெட்டுப் புள்ளி வழியே செல்லும் ஒரு வட்டத்தின் ஆரம் அடுத்த வட்டத்திற்குத் தொடுகோடு ஆனுல் இரண்டு வட்டங்களும் குத்து வட்டங்கள்.

$O_1 A$, வட்டம் (O_2) க்குத் தொடுகோடு ஆனுல் $O_1 A \perp O_2 A$.

$\therefore$ $O_2 A$, வட்டம் (O_1) க்குத் தொடுகோடு ஆகிறது.

$\therefore$ இரண்டு தொடுகோடுகளுக்கும் இடையே உள்ள கோணம் $\angle O_1 AO_2 = 90°$.

7. வெட்டும் வட்டங்கள் இரண்டில் வெட்டுப்புள்ளி வழியே வரையப்படும் ஆரங்கள் செங்குத்துக் கோடுகள் ஆனுல் வட்டங்கள் குத்து வட்டங்கள் ஆகும்.

ஆரங்களுக்கு இடையே உள்ள கோணம்=தொடுகோடுகளுக்கு இடையே உள்ள கோணம்.

(தேற்றம் 13)

$\therefore$ தொடுகோடுகளுக்கு இடையே உள்ள கோணம் $= 90°$.

8. வெட்டும் வட்டங்கள் இரண்டில் வெட்டுப்புள்ளி வழியே ஒரு வட்டத்தின் தொடுகோடு அடுத்த வட்டத்தின் மையப்புள்ளி வழியே சென்ருல் (அதாவது) அடுத்த வட்டத்தின் ஆரம் ஆனுல்) இரண்டு வட்டங்களும் குத்து வட்டங்கள்.

AT_1, O_1 வழியாக சென்ருல், $O_1 AT$ ஒரு நேர்கோடு.

$\therefore \quad O_1 AT_1 \perp O_2 A$.

$\therefore \quad O_2 A$, வட்டம் (O_1) க்குத் தொடுகோடு.

$\therefore$ தொடு கோடுகளுக்கு இடையே உள்ள கோணம் $90°$.

9. வெட்டும் வட்டங்கள் இரண்டில், ஒரு வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து அடுத்த வட்டத்துக்கு வரையப்பட்ட தொடு கோட்டின் நீளம் அந்த வட்டத்தின் ஆரத்துக்குச் சமமாஞல், வட்டங்கள் குத்து வட்டங்கள் ஆகும்.

O_1 லிருந்து வட்டம் (O_2) க்கு வரையப்பட்ட தொடுகோட்டின் நீளம் r_1 ஆஞல், அந்தத் தொடுகோடு வட்டம் (O_2) வைத் தொடும் புள்ளி வட்டம் (O_1) இன் மேல் இருக்க வேண்டும்.

(அ-து) தொடு புள்ளி இரண்டு வட்டங்களுக்கும் பொது.

(அ-து) தொடு புள்ளி இரண்டு வட்டங்களும் வெட்டும் புள்ளிகளில் ஒன்று. அதை A என்போம்.

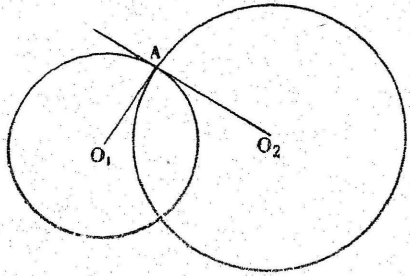
$\therefore O_1 A$, வட்டம் (O_2) க்குத் தொடுகோடு.

$\therefore \angle O_1 AO_2 = 90°$.

$\therefore$ தொடுகோடுகளுக்கு இடையே உள்ள கோணம் $90°$.
வட்டங்கள் A யில் வெட்டிக் கொண்டால், $\angle O_1A\,O_2 = 90°$.

$\therefore$ தொடுகோடுகளுக்கு இடையே உள்ள கோணம் $90°$.
(தேற்றம் 13)

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு வட்டத்துக்குக் குத்து வட்டம் வரைவதெப்படி?



II படம் 4

வட்டம் (O_1) கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.

$O_1 A$ என்னும் ஆரம் வரைக.

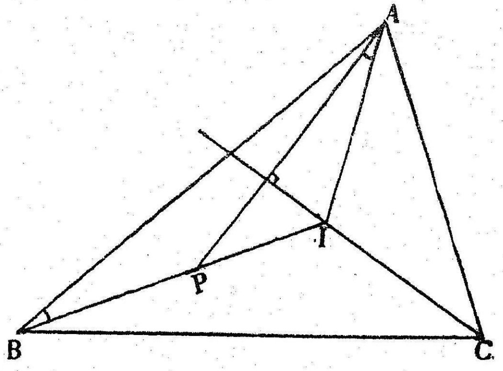
A யில் $O_1 A$ க்குக் குத்துக் கோடு வரைக. அது தொடு கோடு ஆகும்.

அதில் O_2 என்னும் ஏதாவது புள்ளி குறிக்கவும்.

O_2 மையமாகவும், $O_2 A$ ஆரமாமாகவும் உள்ள வட்டம், வட்டம் (O_1) க்குக் குத்து வட்டம் ஆகும்.

மாதிரிகள்

1. $\triangle ABC$ யில் I உள் வட்ட மையம். A யிலிருந்து CI க்குச் செங்குத்தாக வரையப்படும் கோடு BI யை P யில் வெட்டுகிறது. I மையமாகவும் IA ஆரமாகவும் உள்ள வட்டம், வட்டம் ABP யைக் குத்தாக வெட்டுகிறது என நிரூபிக்கவும்.



II படம் 5

கொள்கை : (1) I, $\triangle ABC$ யின் உள் வட்ட மையம்.
(2) $AP \perp CI$.
(3) P, BI யில் இருக்கிறது.

நிரூபிக்க : வட்டம் ABP யும், I மையமாக IA ஆரமாக உள்ள வட்டமும் குத்து வட்டங்கள் என.

நிரூபணம் : I உள் வட்ட மையம்.

$\therefore \angle ABP = \angle ABI = \frac{1}{2} B.$

$AP \perp CI.$

$\therefore \angle CAP = 90° - \frac{1}{2} C$

$= \frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B.$

$\therefore \angle PAI = \angle PAC - \angle IAC$

$= \frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B - \frac{1}{2} A$

$= \frac{1}{2} B.$

$\therefore \angle ABP = \angle PAI \ (= \frac{1}{2} B.)$

$\therefore$ IA, வட்டம் ABP யின் தொடுகோடு

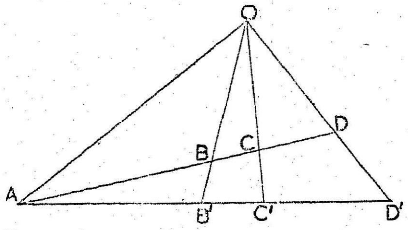
$\therefore$ I யை மையமாகவும் IA ஆரமாகவும் உள்ள வட்டத்தின் ஆரம் வட்டம் ABP யைத் தொடுகிறது.

$\therefore$ அவை குத்து வட்டங்கள்.

2. $\triangle ABC$ யில் $\angle B$ செங்கோணம். O, AB யின் மையப் புள்ளி.

(1) AB, BC க்களை விட்டங்களாகவுடைய வட்டங்கள் குத்து வட்டங்கள் என நிரூபிக்க.

(2) வட்டங்கள் AOB, BOC குத்து வட்டங்கள் எனவும் நிரூபிக்கவும்.



படம் 6

கொள்கை : (1) $\triangle ABC$ யில் $\angle B = 90°$.

(2) O, AC யின் நடுப்புள்ளி.

நிரூபிக்க : (1) AB, BC க்களை விட்டங்களாகவுடைய வட்டங்கள் குத்து வட்டங்கள்.

(2) வட்டம் AOB, வட்டம் BOC குத்து வட்டங்கள்.

நிரூபணம் : (1) AB யை விட்டமாகவுடைய வட்டத்தின் மையம் AB யின் மையப் புள்ளி P என்போம்.

BC யை விட்டமாகவுடைய வட்டத்தின் மையப்புள்ளி Q என்போம்.

இவ்விரு வட்டங்களும் B வழியே செல்கின்றன. PB, QB, B வழிச் செல்லும் ஆரங்கள். ஆனால் $\angle PBQ = 90°$.

(கொள்கை)

∴ வட்டங்கள் குத்து வட்டங்கள். (தேற்றம் 13, கிளை 7)

(2) O, AC யின் மையப் புள்ளி.

∴ $OA = OB = OC$.

∴ வட்டம் AOB யின் மையம், AB யின் மையக் குத்துக் கோடாகிய OP யில் இருக்கிறது.

அது போலவே, வட்டம் BOC யின் மையம், BC யின் மையக் குத்துக் கோடாகிய OQ வில் இருக்கிறது.

இரு வட்டங்களும் O வழிச் செல்கின்றன.

∴ O வழிச் செல்லும் ஆரங்கள் இரண்டுக்கும் இடையே உள்ள கோணம் $= \angle POQ$.

OP, OQ இவை முறையே AB, BC க்குச் செங்குத்துக் கோடுகள்.

∴ $\angle POQ = \angle ABC = 90°$,

∴ வட்டம் AOB, வட்டம் BOC இவை குத்து வட்டங்கள். (தேற்றம் 13, கிளை 7)

பயிற்சி 8 (a)

1. கொடுக்கப்பட்ட ஒரு வட்டப்பரிதியில் உள்ள ஒரு புள்ளியில் அதைக் குத்தாக வெட்டும்படி கொடுக்கப்பட்ட ஆரம் உள்ள ஒரு வட்டம் வரைக.

2. கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு வட்டங்களைக் குத்தாக வெட்டும்படி கொடுக்கப்பட்ட ஆரம் உள்ள ஒரு வட்டம் வரைக.

3. கொடுக்கப்பட்ட ஒரு புள்ளியை மையமாகக் கொண்டு கொடுக்கப்பட்ட ஒரு வட்டத்தை குத்தாக வெட்டும் வட்டம் வரைக.

4. ஒரு வட்டத்தை இரண்டு வட்டங்கள் ஒரே புள்ளியில் வெட்டினால் அவை யிரண்டும் ஒன்றையொன்று அதே புள்ளியில் தொடுகின்றன என்று நிரூபிக்க.

5. இரு வட்டங்கள் (O_1), (O_2) A, B யில் குத்தாக வெட்டுகின்றன. $O_1 O_2$, AB யை X இல் வெட்டுகிறது.

$O_1 X . X O_2 = X A^2$ என நிரூபிக்க.

பயிற்சி 8 (b)

1. வட்டங்கள் (O_1), (O_2), A, B யில் குத்தாக வெட்டுகின்றன. $O_1 O_2$ வின் மையப் புள்ளி X.

$O_1 X = XA = XB$ என நிரூபிக்கவும்.

2. இரண்டு வட்டங்கள் (O_1) (O_2) P, Q வில் குத்தாக வெட்டுகின்றன. O_1 O_2 வட்டங்களை முறையே A, B, C, D யில் வெட்டுகிறது. வட்டங்களின் ஆரங்கள் r_1, r_2.

(1) $r_1^2 = O_1C \cdot O_1D$,

(2) $4\,O_1O_2^2 = AB^2 + CD^2$ என நிரூபிக்கவும்.

3. இரு வட்டங்களின் பொதுத் தொடுகோட்டை விட்டமாகவுடைய வட்டம் இரண்டு வட்டங்களையும் குத்தாக வெட்டுகிறது என நிரூபிக்க.

4. $\triangle ABC$ யில் I உள் வட்ட மையம், I_1 வெளி வட்ட மையம். II_1 ஐ விட்டமாகவுடைய வட்டம், AB, AC யை விட்டங்களாகவுடைய வட்டங்களைக் குத்தாக வெட்டுகிறது என நிரூபிக்கவும்.

5. $ABCD$ என்னும் புள்ளி வரிசையில், AC, BD யை விட்டங்களாகவுடைய வட்டங்கள் P யில் குத்தாக வெட்டுகின்றன. $\angle PAD + \angle PDC = 45°$ எனக் காட்டுக.

6. வட்டம் (O) வின் ஒரு விட்டத்தை மற்றொரு வட்டம் P, Q வில் வெட்டுகிறது. இரண்டு வட்டங்களும் A, B யில் குத்தாக வெட்டுகின்றன.

$$\frac{OP}{OP} = \frac{PA^2}{AQ^2}$$ என நிரூபிக்க.

7. $\triangle ABC$ யில் உள்வட்டமும், A க்கு எதிரேயுள்ள வெளி வட்டமும் BC யை முறையே X, X_1 என்னும் புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன. வட்டம் (XX_1) இந்த இரண்டு வட்டங்களையும் குத்தாக வெட்டுகிறது என நிரூபிக்கவும்.

8. r_1, r_2 ஆரங்களாகவுடைய இரண்டு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று தொட்டால், அவற்றின் பொதுத் தொடுகோட்டை விட்டமாகக் கொண்டு வரையப்பட்ட வட்டம் இரண்டு வட்டங்களையும் குத்தாக வெட்டுகிறது எனவும், இந்த வட்டத்தின் ஆரம் R என்றால்,

$$R^2 = r_1 r_2$$ எனவும் நிரூபிக்க.

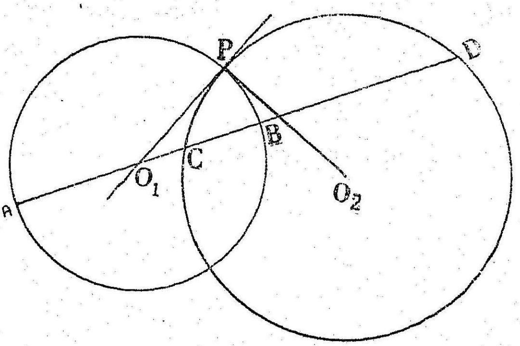
9. இரு வட்டங்கள் P யில் குத்தாக வெட்டிக்கொள்கின்றன. PA, PB இவை P வழியே செல்லும் விட்டங்கள். $PA^2 + PB^2 = AB^2$ என நிரூபிக்கவும்.

10. (a) கொடுக்கப்பட்ட ஒரு வட்டத்தைக் குத்தாக வெட்டும் குறிப்பிட்ட ஆரமுள்ள வட்ட மையத்தின் நியமப் பாதை என்ன?

(b) கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு வட்டங்களைக் குத்தாக வெட்டும்படி பொதுவாகக் கொடுக்கப்பட்ட ஆரமுள்ள இரண்டு வட்டங்கள் வரைய முடியும் எனக் காட்டுக. எப்பொழுது வரைய முடியாது என்பதைச் சொல்லுக.

தேற்றம் 14

இரண்டு குத்து வட்டங்களில், ஒரு வட்டத்தின் எந்த விட்டத்தையும் அடுத்த வட்டம் இசையாகப் பிரிக்கும்.



II படம் 7

கொள்கை : (1) வட்டம் (O_1) ம், வட்டம் (O_2) ம் குத்து வட்டங்கள்.

(2) AB, வட்டம் (O_1) இன் விட்டம்.

(3) AB யை வட்டம் (O_2) C, D யில் வெட்டுகிறது.

(4) P, வட்டங்கள் வெட்டும் புள்ளி.

நிருபிக்க : $(AB, CD) = -1$.

நிருபணம் : $\therefore$ $\odot$ (O_1) ம் $\odot$ (O_2) ம் குத்து வட்டங்கள்.

$\therefore$ $O_1 P$, வட்டம் (O_2) க்குத் தொடுகோடு.

$\therefore$ $O_1 P^2 = O_1 C \cdot O_1 D$.

ஆனால் $O_1 P = O_1 A = O_1 B$ (ஆரங்கள்)

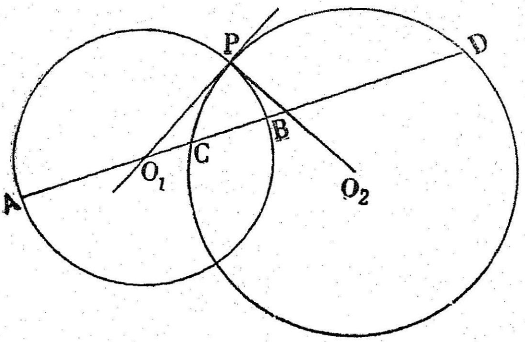
$\therefore$ $O_1 B^2 = O_1 C \cdot O_1 D$.

$\therefore$ $(AB, CD) = -1$. (தேற்றம் 3)

கிளைத் தேற்றம் : $ABCD$ என்னும் புள்ளி வரிசையில், AB யை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம், C,D வழியே செல்லும் ஒரு வட்டத்தைக் குத்தாக வெட்டினால் $(ACBD) = -1$.

தேற்றம் 15

ஒரு நேர்கோட்டை இரு புள்ளிகள் ஹார்மோனிக்காகப் பிரித்தால், நேர்கோட்டை விட்டமாகவுடைய வட்டம் அந்த இரு புள்ளிகள் வழியே செல்லும் எந்த வட்டத்துக்கும் குத்து வட்டமாகும்.



II படம் 8

கொள்கை : (1) $(AB, CD) = -1$.

(2) $\odot (O_1)$ AB யை விட்டமாகக்கொண்டது.

(3) $\odot (O_2)$, C, D வழியே செல்கிறது.

(4) இரண்டு வட்டங்களும் வெட்டும் புள்ளி P.

நிரூபிக்க : வட்டங்கள் (O_1), (O_2) குத்து வட்டங்கள் என.

நிரூபணம் : $(AB, CD) = -1$. (கொள்கை)

வட்டத்தின் மையமாகிய O_1, AB யின் மையப் புள்ளி.

$\therefore O_1 B^2 = O_1C . O_1D$.

ஆனால் $O_1B = O_1 P$.

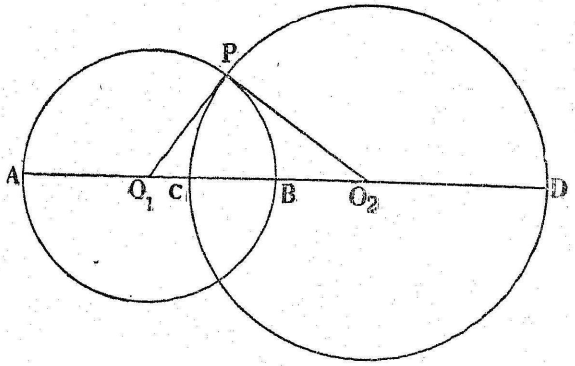
$\therefore O_1 P^2 = O_1C . O_1 D$

$\therefore O_1 P$, வட்டம் (O_2) க்குத் தொடுகோடு.

$\therefore$ வட்டம் (O_1), வட்டம் (O_2) இவை குத்து வட்டங்கள்.

குறிப்பு: $(AB, CD) = -1$ என்றால் AC யை விட்டமாக வுடைய வட்டம் B, D வழியே செல்லும் வட்டத்துக்கும் குத்து வட்டம். BD ஐ விட்டமாக உடைய வட்டம் A, C வழியே செல்லும் எந்த வட்டத்துக்கும் குத்து வட்டம்.

2. குறிப்பாக AC, BD இவை இரண்டையும் விட்டங்களாக உள்ள வட்டங்கள் குத்து வட்டங்கள்.



II படம் 9

$$\therefore O_1 O_2^2 = r_1^2 + r_2^2$$
$$= O_1 A^2 + O_1 C^2.$$
$$\therefore \quad 4 O_1 O_2^2 = 4 O_1 A_2 + 4 O, C^2$$
$$= AB^2 + CD^2.$$

(இதை முன்னமேயே நிரூபித்திருக்கிறோம். இது மற்றொரு நிருபணமாகும்.

தன் மாற்றுப் புள்ளிகள் (Inverse points, இன்வெர்ஸ் புள்ளிகள்).

மையம் O, ஆரம் R உள்ள ஒரு வட்டத்தின் விட்டத்தில், C, D என்னும் புள்ளிகள் O வின் ஒரே பக்கத்திலும், $OC.OD = r^2$ உள்ளபடி அமைந்தால் C, D அவ்வட்டத்தின் தன் மாற்றுப் புள்ளிகள் ஆகும்.

குறிப்பு: 1. இரு புள்ளிகள் ஒரு வட்டத்தின் தன் மாற்றுப்புள்ளிகள் ஆனால் அவற்றைச் சேர்க்கும் நேர்கோடு அந்த வட்டத்தின் மையத்தின் வழி செல்லும்,

2. வட்டம் (O) வில் $OC.\ OD = r^2 = OA^2$ ஆனல் C, D தன் மாற்றுப் புள்ளிகள் எனப் பார்த்தோம்.

$\therefore$ OC குறைந்தால் OD அதிகரிக்கும்.

(அ-து) வட்டத்தின் மையத்தை நெருங்க D அதை விட்டு தூரத்தில் செல்லும். C, O வுடன் ஐக்கியமானல், D எட்டாப் புள்ளி ஆகும்.

(அ-து) வட்ட மையத்தின் தன் மாற்றுப் புள்ளி எட்டாப் புள்ளி (Point at infinity) ஆகும்.

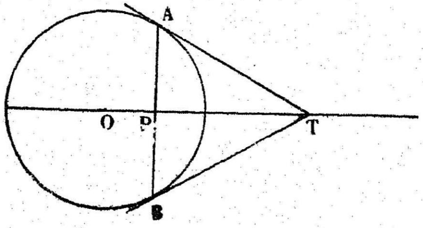
3. வட்டப்பரிதியின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளியின் தன் மாற்றுப்புள்ளி அதுவே. ($OC\ .\ OD = r^2$, $OC = r$ என்ருல் $OD = r$ ஆகும் $\therefore D$, C யுடன் பொருந்தும்)

கிளைத் தேற்றங்கள்

1. ஒரு வடடத்தின் இரு தன் மாற்றுப்புள்ளிகள் அவற்றின் வழியே செல்லும் விட்டத்தை இசையாகப் பிரிக்கின்றன.

2. இரண்டு புள்ளிகள் ஒரு வட்டத்தின் விட்டத்தை ஹார்மோனிக்காகப் பிரித்தால் அவை (இன்வெர்ஸ்) மாற்றுப் புள்ளிகள்.

3. வட்டத்திற்கு வெளியே உள்ள ஒரு புள்ளி. அதன் தொடுநாண் (Chord of contact) அப்புள்ளி வழியே செல்லும் விட்டத்தை வெட்டுப் புள்ளி இவை தன் மாற்றுப் புள்ளிகள்.



படம் 10

AB, T யின் தொடுநாண்

அது OT யை P யில் வெட்டுகிறது.

$AB \perp OT$.

& $\angle\ OAT = 90°$

$\therefore\ OP.OT = OA^2 = r^2$

இதன்படி வட்டத்துக்கு வெளியே உள்ள ஒரு புள்ளியின் தன் மாற்றுப் புள்ளி கண்டுபிடிக்க ஒரு முறை கிடைக்கிறது.

4. வட்டத்துக்கு உள்ளே உள்ள ஒரு புள்ளிக்குத் தன் மாற்றுப் புள்ளி கண்டுபிடிக்க.

படம் 8 ஐப் பார்க்க.

P என்னும் புள்ளி கொடுத்திருந்தால் *OP* யைச் சேர்த்து நீட்டிவிடுக.

P வழியே *OP* க்குக் குத்தாக *AB* என்னும் நாண் வரைக.

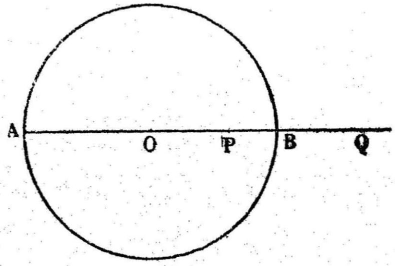
A யில் வட்டத்துக்குத் தொடுகோடு வரைக.

அது *OP* யை *T* யில் வெட்டட்டும்.

T தான் *P* யின் தன் மாற்றுப்புள்ளி.

தேற்றம் 16

ஒரு வட்டத்தின் இரண்டு தன் மாற்றுப் புள்ளிகள் வழியே செல்லும் எந்த வட்டமும் அந்த வட்டத்தைக் குத்தாக வெட்டும்.



II படம் 11

கொள்கை : (1) *AB*, ஒரு வட்டத்தின் விட்டம்.

(2) *O* அதன் மையம்.

(3) *P*, *Q* தன் மாற்றுப் புள்ளிகள்.

நிருபிக்க : *P*, *Q* வழிச் செல்லும் எந்த வட்டமும் வட்டம் (*O*) வைக் குத்தாக வெட்டும் என.

நிருபணம் : *P*, *Q* தன் மாற்றுப் புள்ளிகள்.

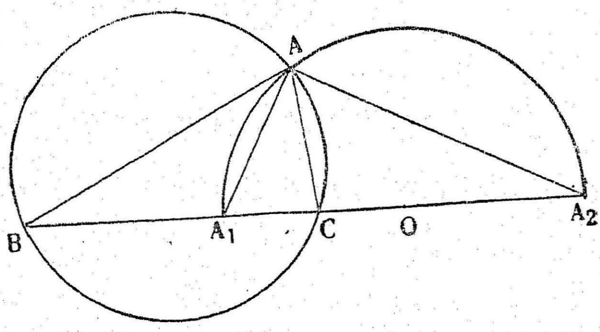
$\therefore OP \cdot OQ = OA^2 = OB^2.$

$\therefore$ *AB* யை *P*, *Q* இசையாகப் பிரிக்கின்றது.

$\therefore$ *P*, *Q* வழிச்செல்லும் எந்த வட்டமும் *AB* யை விட்டமாகவுடை வட்டத்தைக் குத்தாக வெட்டும். **(தேற்றம் 15)**

மாதிரிகள்

(1) $\triangle ABC$யில் $\angle A$ யின் இருசம வெட்டிகள் BC யை A_1, A_2 என்னும் புள்ளிகளில் சந்தித்தால், A_1, A_2 வை விட்டமாக வுடைய வட்டம், $\triangle ABC$ யின் சுற்று வட்டத்தைக் குத்தாக வெட்டுகிறது என நிருபிக்க.



II படம் 12

கொள்கை : (1) $\triangle ABC$ யில் AA_1, AA_2 கோணம் A யின் இருசம வெட்டிகள்.

நிரூபிக்க : $A_1 A_2$ வை விட்டமாகவுடைய வட்டம், வட்டம் ABC யைக் குத்தாக வெட்டுகிறது என.

நிரூபணம் : AA_1, AA_2 இவை $\angle A$ யின் இருசம வெட்டிகள்

$\therefore \angle A_1 A A_2 = 90°$.

$\therefore$ வட்டம் $(A_1 A_2)$, A வழியே செல்கிறது.

மேலும் $(BC, A_1A_2) = -1$. (தேற்றம் 6)

$\therefore$ $A_1 A_2$ விட்டமாகவுடைய வட்டம், B, C வழியே செல்லும் எந்த வட்டத்தையும் குத்தாக வெட்டும். (தேற்றம் 15)

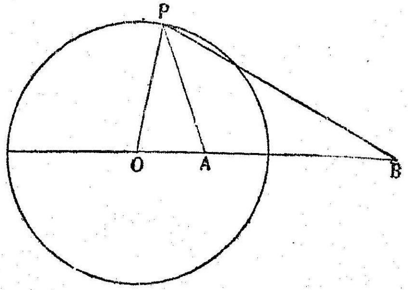
ஆகவே அந்த வட்டம், வட்டம் ABC யையும் குத்தாக வெட்டுகிறது.

2. O மையமாகவுடைய வட்டத்திற்கு A, B யின் தன் மாற்றுப் புள்ளிகள். P அந்த வட்டத்தின் மேல் ஒரு புள்ளி. $\frac{OA}{OB} = \frac{PA^2}{PB^2}$ என நிருபிக்கவும்.

கொள்கை : (1) வட்டத்தின் மையம் O.

(2) P வட்டத்தின் மேல் ஏதாவது ஒரு புள்ளி.

(3) A, B தன் மாற்றுப்புள்ளிகள்.



II படம் 13

நிரூபிக்க : $\frac{OA}{OB}=\frac{PA^2}{PB^2}$

நிருபணம் : OP யைச் சேர்க்க.

$\therefore A, B$ தன் மாற்றுப் புள்ளிகள்.

$\therefore OA \cdot OB = OP^2$

$\therefore \frac{OA}{OP}=\frac{OP}{OB}$

$\triangle OPA$, $\triangle OPB$ யில்,

$\angle O$ பொது.

$$\frac{OA}{OP} = \frac{OP}{OB}$$

$\therefore \triangle OPA \parallel \triangle OBP$.

$\therefore \frac{OP}{OB} \cdot \frac{PA}{BP}=\frac{OA}{OP}$.

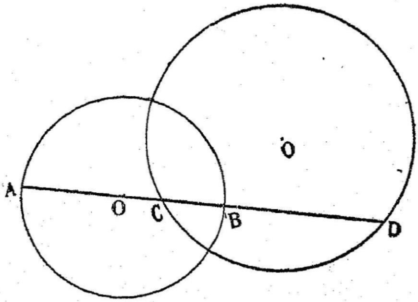
முதல், கடைசி விகிதங்களைப் பெருக்கி, இடையில் உள்ள விகிதத்தின் வர்க்கம் எடுத்தால்,

$\frac{OP}{OB} \cdot \frac{OA}{OP}=\frac{PA^2}{PB^2}$

(அ-து) $\frac{OA}{OB}=\frac{AP^2}{BP^2}$

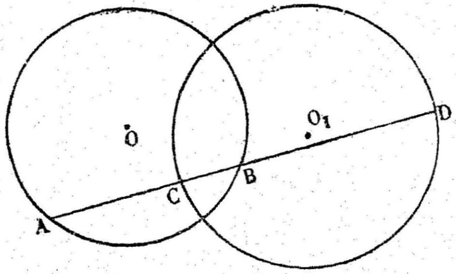
பயிற்சி 9 (a)

1. கீழுள்ள படத்தில் $(ABCD) = -1$. வட்டங்கள் (O), (O_1) குத்து வட்டங்களா? காரணம் கூறுக.



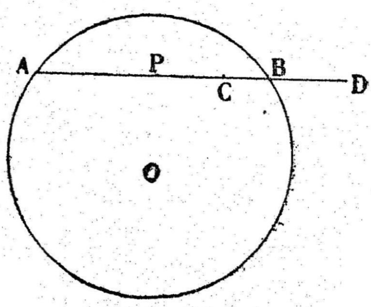
II படம் 14

2. கீழுள்ள படத்தில் $(AB, CD) = -1$. வட்டங்கள் (O), (O_1) குத்து வட்டங்களா? காரணம் கூறுக.



II படம் 15

3. பக்கத்தில் கண்ட பாடத்தில் P, AB இன் மையப் புள்ளி PC, $PD = PB^2$. C, D தன் மாற்றுப் புள்ளிகளா? காரணம் கூறுக.



II படம் 16

4. △ ABC யில் D, E என்னும் புள்ளிகள் BC யை ஹார் மோனிக்காகப் பிரிக்கின்றன. DE யை விட்டமாகவுடைய வட்டம், வட்டம் ABC யைக் குத்தாக வெட்டுகிறது என்று நிரூபிக் கவும்.

5 ஒரு வட்டத்திற்கு இரு ஜதை இன்வெர்ஸ் (தன் மாற்றுப்) புள்ளிகள் இருந்தால் அவை ஒரு வட்டத்தில் அமை யும் புள்ளிகள் என நிரூபிக்கவும்.

பயிற்சி 9 (ந)

1. △ ABC யில், A_1, B_1, C_1 முறையே BC, CA, AB யில் உள்ள புள்ளிகள். AA_1, BB_1, CC_1 ஒரு புள்ளி வழிக்கோடுகள். $B_1 C_1$ BC யை A_2 வில் சந்திக்கிறது. $A_1 A_2$ வை விட்டமாக வுடைய வட்டம், வட்டம் ABC யைக் குத்தாக வெட்டுகிறது என நிரூபிக்க.

2. △ ABC யில் AD, BE, CF குத்துக் கோடுகள். EF, BC யை D இலும் AD யை K யிலும் வெட்டுகிறது. KD_1 ஐ விட்டமாகவுடைய வட்டம் முக்கோணத்தின் ஒன்பது புள்ளி வட்டத்தைக் குத்தாக வெட்டுகிறது என நிரூபிக்க.

3. △ ABC யில் I உள் வட்ட மையம் I_1, A க்கு எதிரே யுள்ள வெளி வட்ட மையம். AI, BC யை X இல் வெட்டுகிறது. II_1 ஐ விட்டமாகவுடைய வட்டம், வட்டம் ABX, வட்டம் ACX இவற்றைக் குத்தாக வெட்டுகிறது என நிரூபிக்கவும்.

4. ஒரு வட்டத்தில் BC என்னும் நாண் A இல் வரையப் படும் தொடுகோட்டை T யில் வெட்டுகிறது. T யை மையமாக வும் TA ஆரமாகவும் உள்ள வட்டம் BC யை இணையாகப் பிரிக்கிறது என நிரூபிக்க.

5. A, B என்னும் மையங்களுள்ள இரண்டு வட்டங்களின் ஆரங்கள் r_1, r_2. AB யை உட்புறத்திலும், வெளிப்புறத்திலும் $r_1 : r_2$ என்னும் விகிதத்தில் C, D என்னும் புள்ளிகளில் பிரித் தால், CD யை விட்டமாகவுடைய வட்டம் AB வழிச் செல்லும் எந்த வட்டத்தையும் குத்தாக வெட்டும் என நிரூபிக்கவும்.

6. AB யை விட்டமாகவுடைய ஒரு வட்டம் (O) மற்ளெரு வட்டத்தைக் (O_1) குத்தாக வெட்டுகிறது. AB அந்த

வட்டத்தை, C, D என்னும் புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. CD யை விட்டமாகவுடைய வட்டம், வட்டம் (O) வைக் குத்தாக வெட்டுகிறது என நிரூபிக்க.

7. முக்கோணம் ABC யின் சுற்று வட்ட மையம் S, A'.B' முறையே SA, SB யின் மையப்புள்ளிகள். AB யின் தன் மாற்றுப் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடு AB க்கு இணை கோடு என நிரூபிக்கவும்.

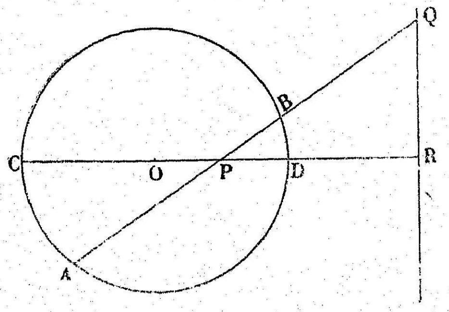
8. $\triangle ABC$ யில் I உள் வட்ட மையமாகவும் IA ஆரமாக வும் உள்ள வட்டத்திற்கு, B யின் தன்மாற்றுப் புள்ளி P.C யின் தன்மாற்றுப் புள்ளி Q.

(1) AP, CI க்குச் செங்குத்துக்கோடு,

(உ) $\triangle APQ$ வின் குத்து மையம் I என்று நிரூபிக்க.

தேற்றம் 17

பல வட்ட நாண்கள் கொடுக்கப்பட்ட ஒரு புள்ளி வழிச் செல்கின்றன. அந்த வட்ட நாண்களின் முனைகளுக்கு, அப் புள்ளியின் இசைத்துணைப் புள்ளியின் நியமப்பாதை அப்புள்ளி வழிச் செல்லும் விட்டத்துக்கு அதன் தன்மாற்றுப் புள்ளி வழியே வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோடாகும்.



II படம் 17

கொள்கை: (1) P கொடுக்கப்பட்ட ஒரு புள்ளி.

(2) வட்டம் (O) வில் CD, P வழிச் செல்லும் விட்டம்.

(3) AB, P வழிச் செல்லும் ஒரு நாண்.

(4) Q, AB யில் P யின் இசைத் துணைப்புள்ளி. (அ–து) $(AB, PQ) = -1$.

நிரூபிக்க: Q வின் நியமப் பாதை P யின் தன்மாற்றுப் புள்ளி வழியே CD க்கு வரையபட்ட செங்குத்துக் கோடு என.

நிரூபணம்: Q விலிருந்து CD க்கு ஒரு குத்துக்கோடு வரைவோம். அது CD யை R இல் வெட்டட்டும். $(AB, PQ) = -1$. (கொள்கை)

$\therefore$ PQ வை விட்டமாகவுடைய வட்டம், வட்டம் (O) வைக் குத்தாக வெட்டும். (தேற்றம் 15)

மேலும் $\angle PRQ = 90°$.

அந்த வட்டம் R வழிச் செல்கிறது.

$\therefore$ $\odot (O) \perp \odot OPQR$,

$\therefore$ $(CD, PR) = -1$. (தேற்றம் 14)

$\therefore$ $OP \cdot OR = OD^2$.

$\therefore$ R, P யின் தன்மாற்றுப் புள்ளி.

$\therefore$ OP யில் R ஒரு நிலையான புள்ளி.

மேலும் $RQ \perp OR$.

$\therefore$ Q, R வழியே OP க்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோட்டில் இருக்கிறது.

மேலும் R வழியே OP க்குச் செங்குத்தாக வரையப்பட்ட கோட்டில் Q ஏதாவது ஒரு புள்ளியானல், Q வழியே வரையப் பட்ட ஏதாவது ஒரு கோடு QP, வட்டத்தை A, B யில் வெட்டினல், $(AB, PQ) = -1$ என்றும் நிரூபிக்கலாம்.

நிரூபணம்: PQ விட்டமாகவுடைய வட்டம் R வழிச் செல்லும். ($\because$ $\angle PRQ = 90°$. கொள்கைப்படி) R, P யின் தன்மாற்றுப் புள்ளி.

$\therefore$ P, R வழிச் செல்லும் விட்டம், வட்டம் (O) வைக் குத்தாக வெட்டும். (தேற்றம் 16, கிளை 4)

$\therefore$ வட்டம் (O) $\perp$ வட்டம் PQR.

$\therefore$ A, B அந்த வட்டத்தின் விட்டம் PQ வை இசையாகப் பிரிக்கின்றன. (தேற்றம் 14)

$\therefore$ $(QBPA) = -1$.

$\therefore$ $(APBQ) = -1$. (சம குறுக்கு விகிதங்கள்)

$\therefore$ Q, AB யில் P யின் இசைத் துணைப்புள்ளி.

$\therefore$ Q வின் நியமப்பாதை P யின் மாற்றுப் புள்ளி வழியே OP க்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடு.

வரையறை

RQ வை P யின் போலார் அல்லது இசைக்கோடு (Polar) என்றும், P யை RQ வின் (Pole) போல் அல்லது இசைப் புள்ளி என்றும் சொல்வோம்.

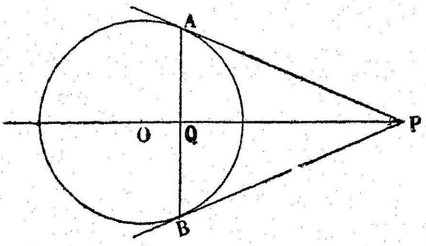
கிளைத் தேற்றங்கள்

1. ஒரு வட்டத்தில் ஒரு புள்ளியின் போலார் அதன் வழியே வரையப்படும் எந்த நாணிலும் உள்ள இசைத் துணைப் புள்ளி வழியே செல்லும்.

(அ-து) P வழியே AB என்னும் நாண் வரைந்தால் P யின் இசைத்துணைப் புள்ளிப் அதன் போலாரில் இருக்கும்.

2. ஒரு வட்டத்தில் ஒரு நாணை (அல்லது விட்டத்தை) அதில் ஒரு புள்ளியும் அதன் போலாரும் இசையாகப் பிரிக்கின்றன.

3. ஒரு நேர்கோட்டுக்கு ஒரு வட்ட மையத்திலிருந்து செங்குத்துக் கோடு வரைந்தால் குத்தடியின் தன் மாற்றுப் புள்ளி, அதன் போலாகும்.



II படம் 18

வட்டம் (O) வில், P யின் தொடு நாண் AB. OP, AB யை Q வில் வெட்டினுல், $OP \cdot OQ = OA^2 = r^2$.

$\therefore$ Q, P யின் தன்மாற்றுப் புள்ளி.

மேலும் $AB \perp OP$.

$\therefore$ AQB, P யின் தன் மாற்றுப் புள்ளி வழியே வரையப் பட்ட செங்குத்துக் கோடு.

$\therefore$ அது P யின் போலாராகும்.

குறிப்பு :

இதிலிருந்து ஒரு வட்டத்துக்கு வெளியே உள்ள ஒரு புள்ளியின் போலார் வரைய ஒரு முறை கிடைக்கிறது.

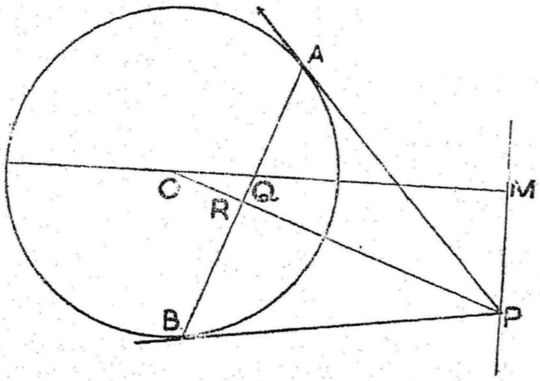
5. இரண்டு புள்ளிகள் ஒரு வட்டத்தின் விட்டத்தை அல்லது நாணையோ ஹார்மோனிக்காகப் பிரித்தால், ஒன்றின் போலார் மற்றதன் வழிச் செல்லும்.

6. ஒரு வட்டப் பரிதியின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளியின் போலார், அப்புள்ளியில் வரையப்பட்ட தொடு கோடாகும். (வட்டப் பரிதியின் மேலுள்ள புள்ளியின் தன் மாற்றுப் புள்ளி அதுவே).

ஆகவே இவை இரண்டுக்கும் நியமப் பாதை ஒரு நேர் கோடு.

தேற்றம் 19

ஒரு குறிப்பிட்ட நேர்கோட்டில் ஏதாவது ஒரு வட்டத்துக்கு வரையப்பட்ட தொடு நாண் ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளி வழிச் செல்லும்.



II படம் 19

கொள்கை : (1) *Pr* ஒரு கொடுக்கப்பட்ட நேர் கோடு.

(2) வட்டம் (*O*) கொடுக்கப்படுகிறது.

(3) *P*, *Pr* இல் ஏதாவது ஒரு புள்ளி.

(4) *AB*, *P* யின் தொடு நாண்.

நிருபிக்க : *AB* ஒரு நிலையான புள்ளி வழிச் செல்லும் என்று.

நிருபணம் : *O* விலிருந்து *OQM* என்றும் குத்துக் கோடு *Pr* க்கு வரைவோம். அது *AB* யை *Q* வில் வெட்டட்டும். *OP*, *AB* யை *R* இல் வெட்டட்டும்.

AB, *P* யின் தொடு நாண்.

$\therefore \quad OP \perp AB.$

$\therefore \quad \angle QRP = 90°.$

மேலும் $\angle QMP = 90°$. (வரைதல்படி.)

$\therefore$ $QRPM$ வட்ட நாற்கரம்.

$\therefore$ $OQ . OM = OR . OP$.

ஆனால் $\triangle OAP$ யில்,

$\angle OAP = 90°$.

$AR \perp OP$.

$\therefore$ $OR . OP = OA^2 = r^2$

$\therefore$ $OQ . OM = r^2$.

$\therefore$ Q, M தன்மாற்றுப் புள்ளிகள்.

PM ஒரு நிலையான கோடு.

அதற்கு QM, P விலிருந்து வரையப்பட்ட குத்துக் கோடு.

$\therefore$ M ஒரு நிலையான புள்ளி.

$\therefore$ அதன் தன் மாற்றுப் புள்ளி Q வும் நிலையானது.

$\therefore$ AB, ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளி Q வழியே செல்கிறது.

குறிப்பு 1. P, R ; O, M தன் மாற்றுப் புள்ளிகள். $\therefore$ வட்டம் $PMQR \perp$ வட்டம் (O)

2. M, Q வின் தன்மாற்றுப் புள்ளி.

$PM \perp OM$.

$\therefore$ PM, Q வின் போலார்.

$\therefore$ Q, PM இன் போல்.

$\therefore$ அந்தக் குறிப்பிட்ட புள்ளி கொடுக்கப்பட்ட கோட்டின் போல் ஆகும்.

கிளைத் தேற்றங்கள்

1. கொடுக்கப்பட்ட ஒரு கோட்டிலுள்ள ஏதாவது ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு வட்டத்துக்கு வரையப்படும் தொடு நாண் அக்கோட்டின் போல் வழியே செல்லும்.

தேற்றம் 19 (மறுதலை)

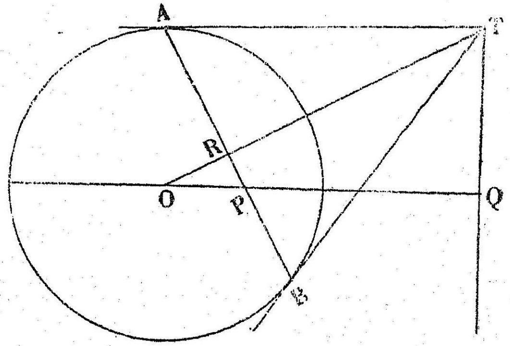
ஒரு வட்டத்தில் ஒரு நிலையான புள்ளி வழிச் செல்லும் ஏதேனும் ஒரு நாணின் முனைகளில் வரையப்பட்ட தொடு கோடுகள் ஒரு நிலையான நேர்கோட்டில் சந்திக்கும்.

கொள்கை : (1) வட்டம் (O) வில் P ஒரு நிலையான புள்ளி.

(2) AB, P வழிச் செல்லும் ஏதாவது ஒரு நாண்.

(3) AT, BT வட்டத்தின் தொடுகோடுகள்.

நிரூபிக்க : T ஒரு நிலையான நேர்கோட்டில் உள்ளது என்று.



II படம் 20

நிரூபணம் : T யிலிருந்து OP க்கு TQ என்னும் லம்பம் வரைவோம்.

OT, AB யை R இல் வெட்டட்டும்.

$OT \perp AB$. (AB, T யின் தொடுநாண்)

$\therefore \quad \angle PRT = 90°$

மேலும் $\angle TQP = 90°$ (வரைதல்படி)

$\therefore \quad PRTQ$ வட்ட நாற்கரம்

$\therefore \quad OP \cdot OQ = OR \cdot OT.$

ஆனால் $\triangle OAT$ யில்,

$\angle OAT = 90°$ (AT தொடுகோடு)

$AR \perp OT.$

$\therefore \quad OR \cdot OT = OA^2 = r^2.$

$\therefore \quad OP \cdot OQ = r^2.$

ஆகையால் Q, P யின் தன் மாற்றுப்புள்ளி.

$\therefore \quad Q$ நிலையானது.

மேலும் TQ, OP வுக்கு லம்பமாக வரையப்பட்டது.

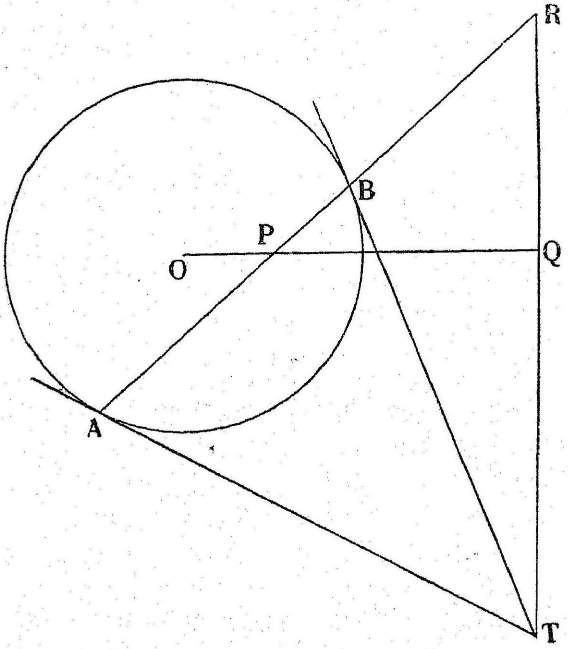
$\therefore$ TQ, நிலையான கோடு.

(அ-து) T ஒரு நிலையான நேர்கோட்டில் இருக்கிறது. அது P யின் போலார் (Polar) ஆகும்.

குறிப்பு :

ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லும் ஏதாவது ஒரு நாணில் அப்புள்ளியின் இசைத் துணைப் புள்ளியும், நாணின் முனைகளில் வரையப்படும் தொடு கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளியும் ஒரே

நேர்கோட்டில் அமைகின்றன. அது அப்புள்ளியின் போலார். ஆனால் அந்த இரண்டு புள்ளிகளும் வெவ்வேறு. இதைக் கீழ்க்கண்ட படத்தில் காணலாம்.



II படம் 21

AB என்னும் நாணில் P யின் இசைப்புள்ளி R.

A, B யில் வரையப்பட்ட தொடுகோடுகள் T யில் சந்திக்கின்றன.

R, T இரண்டும் P யின் போலாரில் உள்ளன. ஆகவே இவை இரண்டுக்கும் நியமப்பாதை ஒரே நேர்கோடு.

2. ஒரு வட்டத்தின் தொடுகோட்டின் போல் அக் கோட்டின் தொடு புள்ளியாகும்.

இன்னும், தொடு கோட்டில் உள்ள எந்தப் புள்ளிக்கும் தொடு நாண் அதன் தொடு புள்ளி வழிச் செல்லும்; ∴ அது போலாகும்.

3. வட்ட மையத்தின் போலார் எட்டாக் கோடு (line at infinity).

(வட்ட மையத்தின் தன் மாற்றுப் புள்ளி எட்டாப் புள்ளியாகையால்.)

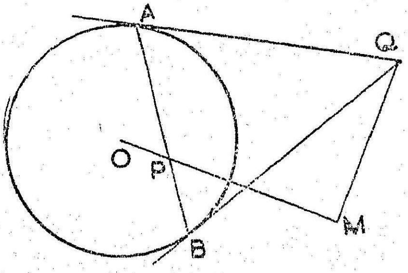
4. விட்டத்தின் போல், அதற்குச் செங்குத்தாக வரையப்பட்ட விட்டத்தில் உள்ள எட்டாப் புள்ளி (Point at infinity) ஆகும்.

(மையத்திலிருந்து விட்டத்துக்குக் குத்துக்கோடு வரைந்தால் அதன் குத்தடி மையமே. அதன் தன் மாற்றுப் புள்ளி அவ்விட்டத்தில் உள்ள எட்டாப் புள்ளி).

ஒரு வட்டத்துக்கு உள்ளே உள்ள ஒரு புள்ளியின் போலார் வரைய.

முறை 1. வட்டம் (O)வில் P ஒரு புள்ளி. OP யைச் சேர்த்து நீட்டிவிடவும். P யின் தன் மாற்றுப்புள்ளி P வைக் கண்டு பிடித்து P வழியே OP வுக்குக் குத்துக் கோடு வரையவும். அது P யின் போலார் ஆகும். (தேற்றம் 17)

முறை 2. P வழியே AB என்னும் நாண் வரையவும். A, B யில் தொடுகோடுகள் வரைந்து அவை வெட்டும் புள்ளி

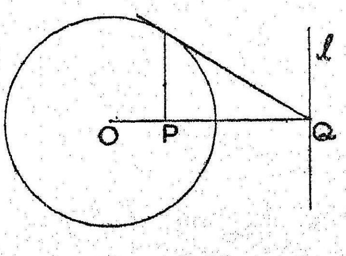


II படம் 22

P கண்டுபிடிக்கவும். OP யை நீட்டி, P விலிருந்து OP க்கு லம்பம் வரையவும். PM, P யில் போலாராகும். (தேற்றம் 18)

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு நேர் கோட்டின் போல் கண்டு பிடிக்க.

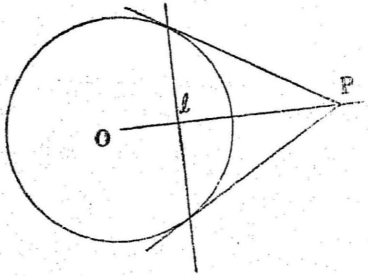
(1) l வட்டத்தை வெட்டாவிட்டால்



II படம் 23

கொடுக்கப்பட்ட கோடு l என்போம். வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து l க்கு ஒரு செங்குத்துக் கோடு வரையவும். அது l ஐ P யில் வெட்டட்டும். P யின் தன் மாற்று புள்ளி P யைக் கண்டுபிடி.

(2) l வட்டத்தை வெட்டினால்

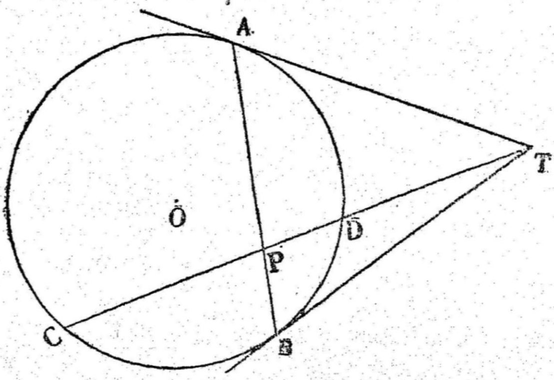


II படம் 24

l விட்டத்தை A, யில் வெட்டுகிறது என்போம். A, B யில் தொடுகோடுகள் B வரைந்து அவை சந்திக்கும் புள்ளிPயை கண்டுபிடிக்க. P, l இன் போலாகும். (தேற்றம் 16, கிளை 4)

மாதிரிகள்

1. ஒரு வட்டத்தில் AB ஒரு நாண். A_1 B யில் வரையப் படும் தொடு கோடுகள் T யில் சந்திக்கின்றன. T வழியே வரையப்பட்ட ஒரு நேர்கோடு AB யை P யிலும், வட்டத்தை C, D யிலும் வெட்டுகிறது. A, B, C, D ஹார்மோனிக் வட்டப் புள்ளிகள் என நிரூபிக்க.



II படம் 25

கொள்கை : (1) AB வட்டம் (O) வில் ஒரு நாண்.

(2) A, B யில் தொடுகோடுகள் T யில் சந்திக்கின்றன.

(3) CD, T வழியே ஒரு நாண்.

(4) CD, AB யை P யில் வெட்டுகிறது.

நிருபிக்க : A, C, B, D ஹார்மோனிக் வட்டப் புள்ளிகள்.

நிருபணம் :

P வழியே வரையப்பட்ட நாண் AB.

$\therefore$ T, P யின் போலாரில் இருக்கிறது.

$\therefore$ T, P இவை CD யை ஹார்மோனிக்காகப் பிரிக்கின்றன. (தேற்றம் 17)

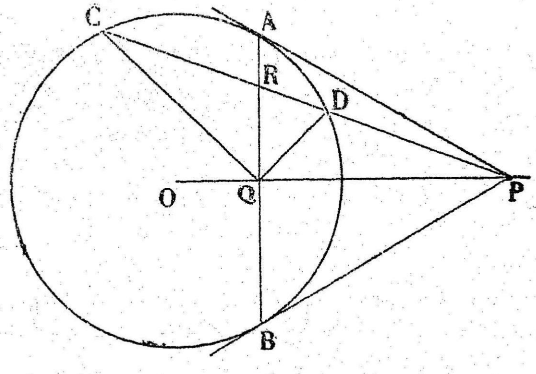
$\therefore$ $(CPDT) = -1$.

$\therefore$ $A\,(CPDT) = -1$.

$\therefore$ $A\,(CBDA) = -1$.

$\therefore$ C, B, D, A ஹார்மோனிக் வட்டப் புள்ளிகள்.

2. P ஒரு வட்டத்திற்கு வெளியே உள்ள ஒரு புள்ளி. AB அதன் தொடு நாண்; AB, OP யை Q வில் வெட்டுகிறது. P வழியே வரையப்பட்ட ஒரு கோடு வட்டத்தை C, D யில் வெட்டுகிறது. AQ, $\angle CQD$ யின் இருசம வெட்டியென நிருபிக்கவும்.



II படம் 26

கொள்கை : (1) P வட்டத்துக்கு வெளியே ஒரு புள்ளி.

(2) AB, P யின் தொடுநாண்.

(3) OP, AB யை Q வில் வெட்டுகிறது.

(4) PDC வட்டத்தை C, D யில் வெட்டுகிறது.

நிரூபிக்க : AQ, $\angle CQD$ யின் இருசம வெட்டியென.

நிரூபணம் : AB, CD யை R இல் வெட்டட்டும்.

AB, P யின் தொடு நாண்.

அது R வழிச் செல்கிறது.

$\therefore$ R, P யின் போலாரில் இருக்கிறது.

$\therefore$ P, R இன் போலாரில் இருக்கிறது. (தேற்றம் 18)

$\therefore$ CD யை R, P இசையாகப் பிரிக்கின்றன.

$\therefore$ $(CRDP) = -1$.

$\therefore$ $Q\,(CROP) = -1$.

ஆனல் $\angle RQP = -90°$. $(AB \perp OP)$

$\therefore$ RQ, QP இவை $\angle CQD$ யின் இரு சம வெட்டிகள். (தேற்றம் 6)

$\therefore$ AQ, $\angle COD$ யின் இருசம வெட்டி.

பயிற்சி – 10 (a)

1. ஒரு வட்டத்தில் AB என்னும் விட்டத்தில் T ஒரு புள்ளி. PQ, T யின் தொடு நாண். PQ, AB யை R இல் வெட்டுகிறது. $P(ARBT) = -1$ என நிரூபிக்க.

2. வட்டங்கள் (O_1), (O_2) A, B யில் குத்தாக வெட்டுகின்றன. AB, வட்டம் (O_1) இல் O_2 வின் தொடு நாண் அல்லது போலார் என நிரூபிக்கவும்.

3. வட்டம் (O) வின் மேல் P ஒரு புள்ளி. P வழியே வரையப்பட்ட விட்டத்தில் T ஒரு புள்ளி. T யிலிருந்து வட்டத்துக்குத் தொடுகள் வரையப்படுகின்றன. தொடுகோடுகள், விட்டம் இவற்றின் 4 வது இசைக்கோடு என்ன ?

4. இரண்டு கோடுகளுக்கு இடையே உள்ள கோணம், ஒரு வட்டத்துக்கு இவற்றின் போல்களுள் வட்ட மையத்தில் தாங்கும் கோணத்துக்குச் சமம் என நிரூபிக்கவும்.

5. ஒரு வட்டம் (O) வில் P யின் போலார் P. P யில் P என்றும் புள்ளி எடுத்து PQ விட்டமாகவுடைய வட்டம் வரையப்பட்டிருக்கிறது. OQ, அந்த விட்டத்தை Q' இல் வெட்டுகிறது. PO^1, Q வின் போலார் என்று நிரூபிக்க.

பயிற்சி–10 (b)

(1) வட்டம் (O) வில் C, D தன்மாற்றுப் புள்ளிகள். C வட்டத்தின் உள்ளே இருக்கிறது, CD க்குக் குத்தாக C வழியே PQ என்னும் நாண் வரையப்படுகிறது.

$$\frac{PD^2}{PC^2} = \frac{OD}{OC}$$ என நிரூபிக்கவும்.

(2) இரண்டு வட்டங்களை ஒரு நேர்கோடு முறையே A, B, C, D யில் வெட்டுகிறது. $ABCD$ இசைப்புள்ளி வரிசையானால், $ABCD$ யிலிருந்து வட்ட மையங்களின் தூரங்களில் அடைபடும் செவ்வகத்தின் பரப்பு மாறுபடாதது என்று நிரூபிக்கவும்.

3. இரண்டு பொது மைய வட்டங்கள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன. அவற்றில் ஒரு வட்டத்துக்கு மற்ற வட்டத்தின் மேலுள்ள புள்ளிகளின் போலார்கள் அதே மையமுள்ள இன்னொரு வட்டத்தைத் தொடும் என்று நிரூபிக்கவும்.

4. இரண்டு பொதுமைய வட்டங்களில் ஒரு வட்டத்துக்கு மற்ற வட்டத்துக்கு வரையப்பட்ட தொடு கோடுகளின் போல்கள், அதே மையமுடைய மற்றொரு வட்டத்தில் அமையும் என நிரூபிக்கவும்.

5. ஒரு வட்டம் (O) வில் P யின் தொடு நாண் AB. P வழியே வட்டத்தை Q, R இல் வெட்டும்படி PQR என்னும் கோடு வரையப்படுகிறது. O விலிருந்து PQR க்கு OS என்னும் லம்பம் வரையப்படுகிறது.

கீழ்க்கண்டவற்றை நிறுவுக:

(1) S, வட்டம் $APBO$ வின் மேல் உள்ளது.

(2) PQR, AB யை T யில் சந்தித்தால்
$$SQ^2 = ST \cdot SP$$

(3) $$\frac{PQ}{PS} = \frac{AQ^2}{AS^2}$$

(4) $\angle ASP = \angle BSP$.

(5) PA, வட்டம் ATS ஐத் தொடுகிறது.

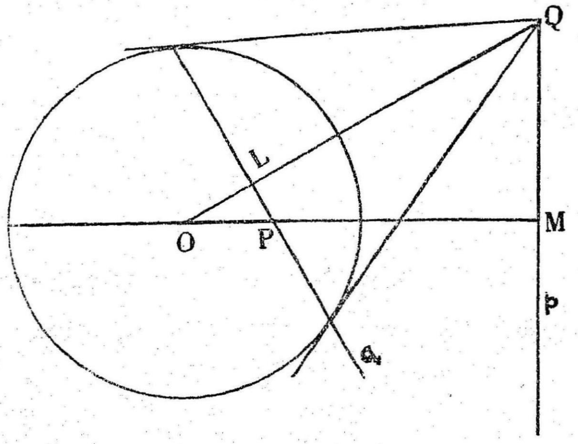
(6) வட்டம் ATS உம் வட்டம் (O) உம் தொடு வட்டங்கள்.

6. வட்டம் (O) வில் P யின் போலார் p என்னும் கோடு. OP, p யை Q வில் சந்திக்கிறது. P வழியே வரையப்பட்ட CD என்னும் நாண் p யை P^1 இல் சந்திக்கிறது. OQ, $\angle CQD$ யின் இரு சம வெட்டி என நிரூபிக்க.

தேற்றம் 20

ஒரு வட்டத்திற்கு ஒரு புள்ளியின் போலார் மற்றொரு புள்ளிவழிச் சென்றால் இரண்டாவது புள்ளியின் போலார் முதல் புள்ளி வழிச் செல்லும்.

கொள்கை: (1) வட்டம் (O) வில் P யின் போலார் p.
(2) p யில் Q ஏதாவது ஒரு புள்ளி.



II படம் 27

நிருபிக்க: Q வின் போலார் P வழிச் செல்லும் என.

நிருபணம்: P யின் தன் மாற்றுப் புள்ளி M ஐக் குறி.

அது p யில் இருக்கிறது.
மேலும் $\angle PMQ = 90°$. (தேற்றம் 17)

Q வின் தன் மாற்றுப்புள்ளி 2 ஐக் குறிக்க.

P, M தன் மாற்றுப் புள்ளிகள். ஆதலால் $OP.Or = r^2$.

Q, T தன் மாற்றுப் புள்ளிகள். ஆதலால் $OL \cdot OQ = r^2$.

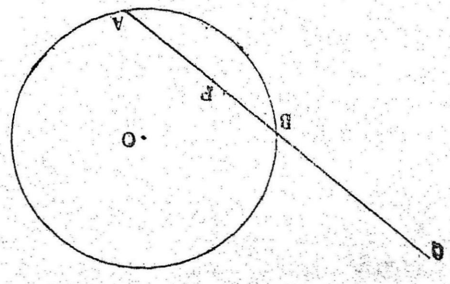
$\therefore$ $\angle Q$; R, P ஒரு வட்டத்திலுள்ளவை.

மேலும் $\angle PrQ = 90°$. (மேற்சொன்னபடி)

$\therefore$ $\angle P \angle Q = 90°$.

$\therefore$ $P\angle$, Q வின் போலார் ஆகும்.

$\therefore$ Q வின் போலார், P வழிச் செல்கிறது



II படம் 28

நிருபணம் :

கொள்கை : வட்டம் (O) வில் P யின் போலார் Q வழிச் செல்கிறது.

நிரூபிக்க : Q வின் போலார் P வழிச் செல்லும் என.

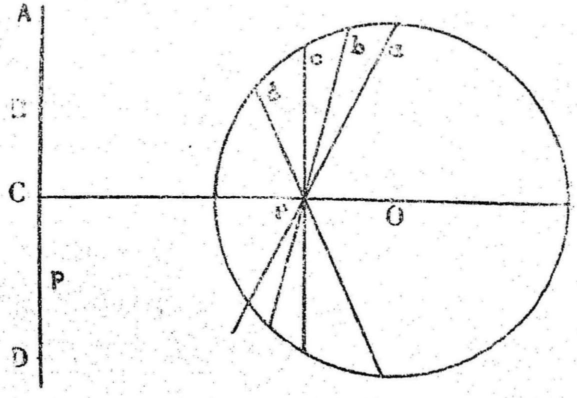
நிருபணம் : PQ வைச் சேர்த்து வட்டத்தை A, B யில் வெட்டுமாறு நீட்டிவிடுக.

P, Q, AB யை இசையாகப் பிரிக்கின்றன.

(தேற்றம் 17, கிளை 2)

$\therefore$ Q வின் போலார் P வழிச் செல்லும். (தேற்றம் 17)

குறிப்பு :



II படம் 29

வட்டம் (O) வில் P யின் போலார் p ஆகும்.

A, B, C, D என்னும் புள்ளிகள் p யில் உள்ளன.

P யின் போலார் A வழிச் செல்வதால் A யின் போலார் P வழிச் செல்லும். அதாவது a, P வழிச் செல்கிறது.

அதுபோலவே b, c, d இவை P வழிச் செல்கின்றன.

(அ–து) a, b, c, d ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள்.

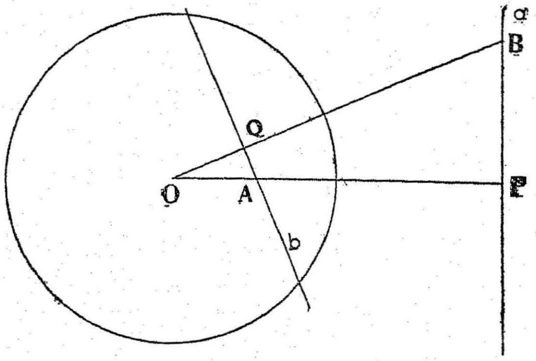
அவை p யின் போல் வழிச் செல்கின்றன.

கிளைத்தேற்றம்

ஒரு வட்டத்திற்கு ஒரு நேர்கோட்டில் உள்ள பல புள்ளிகளின் போலார்கள் அக்கோட்டின் போல் வழிச் செல்லும்.

தேற்றம் 21

ஒரு வட்டத்திற்கு ஒரு நேர்கோட்டின் போல் மற்றொரு நேர்கோட்டில் அமைந்தால் இரண்டாவது நேர்கோட்டின் போல் முதல் நேர்கோட்டில் அமையும்.



II படம் 30

கொள்கை : (1) வட்டம் (O) வில் a என்னும் நேர்கோட்டின் போல் A.

(2) A, b என்னும் நேர்கோட்டில் இருக்கிறது.

நிருபிக்க : b யின் போல் a யில் உள்ளது என.

நிருபணம் : OA வைச் சேர்த்து நீட்டி விடவும்.
அது a யை P யில் வெட்டட்டும்.
$\therefore$ (1) A, P தன் மாற்றுப் புள்ளிகள்.
(2) $AP \perp a$.

O விலிருந்து b க்கு OQ செங்குத்தாக வரைந்து அதை a யை B யில் வெட்டுமாறு நீட்டவும்.

$\angle APB = 90°$. (a, A யின் போலார்)
$\angle AQB = 90°$. (வரைதல்படி)
$\therefore \angle APB = \angle AQB = 90°$.
$\therefore$ $APBQ$ ஒரு வட்ட நாற்கரம்.
$\therefore OA \, . \, OP = OQ \, . \, OB$.
ஆனால் $OA \, . \, OP = r^2$.
$\therefore OB \, . \, OQ = r^2$.
$\therefore$ Q, B யின் தன்மாற்றுப் புள்ளி.
மேலும் $OB \perp b$.

∴ b, B யின் போலார்.

(அ-து) B, b யின் போல்.

∴ b யின் போல் a யில் இருக்கிறது.

மாற்று நிருபணம்

II படம் 27 பார்க்கவும். வட்டம் (O) க்கு, a யின் போல் A; b யின் போல் B. A, b யில் இருக்கிறது.

(அ-து) B யின் போலார் A வழிச் செல்கிறது.

∴ A யின் போலார் B வழிச் செல்லும். (தேற்றம் 30)

∴ a, B வழிச் செல்கிறது.

(அ-து) b யின் போல் a யில் இருக்கிறது.

வரையறுத்தல் :

துணையியக் கோடுகள்

ஒரு வட்டத்துக்கு ஒரு நேர் கோட்டின் போல் மற்ற கோட்டில் உள்ளபடி இரண்டு நேர் கோடுகள் அமைந்தால் அவை துணையியல் கோடுகள் (Conjugate Lines) (காஞ்சுகேட் கோடுகள்) எனப்படும்.

கிளைத் தேற்றங்கள்

1. ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லும் பல கோடுகளின் போல்கள் அந்தப் புள்ளியின் போலாரான நேர் கோட்டில் அமையும். II படம் 26 ஐப் பார்க்கவும்.

a, b, c, d என்னும் கோடுகள் P வழிச் செல்கின்றன. P_1 P யின் போலாராகும். A, B, C, D, a_1 b, c_1 d யின் போல்கள் ஆகட்டும். P யின் போல்கள் P, Q யில் இருப்பதால், a யின் போல் A_1 P யில் இருக்கும். அதுபோலவே, B, C, D யும் P யில் இருக்கும்.

2. இரண்டு கோடுகளின் வெட்டுப் புள்ளியின் போலார், அக்கோடுகளின் போல்களை இணைக்கும் கோடாகும்.
(படம் II 31 ஐப் பார்க்கவும்)

கொள்கை : a, b என்பன் C யில் வெட்டுகின்றன.
a யின் போல் A, b யின் போல் B.

நிருபிக்க : C யின் போலார் AB

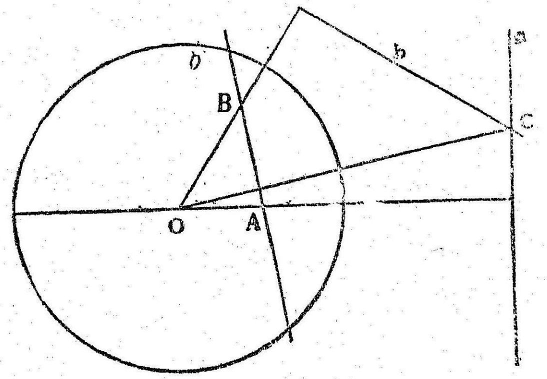
நிருபணம் : A யின் போலாரான C வழிச் செல்கிறது

∴ C யின் போலார், A வழிச் செல்கிறது. B யின் போலாரான b, C வழிச் செல்கிறது.

∴ C யின் போலார், B வழிச் செல்கிறது.

∴ C இன் போலார் A, B வழிச் செல்கிறது.

∴ C யின் போலார் AB.



II படம் 31

3. இரண்டு புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் போல் அப் புள்ளிகளின் போலார்கள் வெட்டும் புள்ளியாகும். II படம் 28 ஐப் பார்க்கவும்.

கொள்கை: A, B இரண்டு புள்ளிகள். a, A யின் போலார். b, B யின் போலார். a, b இவை C யில் வெட்டுகின்றன.

நிரூபிக்க: C, AB யின் போலாகும்.

நிரூபணம்: A, a யின் போலாகும். a யின் போல் AB யிலிருப்பதால், AB யின் போல் a யிலிருக்கும். அதே மாதிரி b யின் போல் AB யிலிருப்பதால், AB யின் போல் b யிலிருக்கும்.

∴ AB யின் போல் a, b இவை இரண்டிலும் இருக்கும்.

∴ AB யின் போல் a, b வெட்டுப் புள்ளியான C ஆகும்.

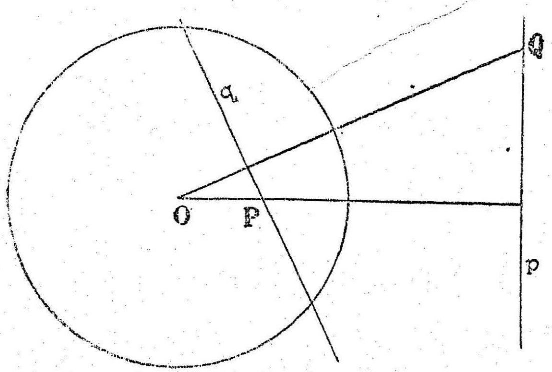
4. இரண்டு துணையியப் புள்ளிகளின் (Conjugate points) போலார்கள், துணையியக் கோடுகள் (Conjugate lines) ஆகும். (படம் II 32 ஐப் பார்க்க)

P, Q துணையியப் புள்ளிகள்.

∴ P யின் போலார் P, Q வழிச் செல்கிறது. Q வின் போலார்ந்து q, Pவழிச் செல்கிறது.

(அ-து) q வின் போலாகிய Q, p யில் இருக்கிறது.

∴ p, q துணையியக் கோடுகள் (காஞ்சுகேட் புள்ளிகள்)



II படம் 32

5. இரண்டு துணையியக் கோடுகளின் போல்கள் துணையியப் புள்ளிகள் ஆகும்.

II படம் 29 பார்க்க. p, q துணையியக் கோடுகள்.

P, p யின் போல், q வில் இருக்கிறது.

Q, q வின் போல் p யில் இருக்கிறது.

∴ Q யின் போலாராகிய q, p வழிச் செல்கிறது.

∴ p, q துணையியக் கோடுகள் (காஞ்சுகேட் கோடுகள்).

தன்னிசை முக்கோணங்களும் (Self conjugate Triangles) போலார் வட்டங்களும் (Polar Circles)

ஒரு முக்கோணத்தில் ஒவ்வொரு பக்கமும் அதன் எதிர் முனையின் போலார் ஆனல் அது தன்னிசை முக்கோணம் ஆகும்.

ஒரு வட்டத்துக்குத் தன்னிசை முக்கோணம் வரைய முடியுமா என்று பார்ப்போம்.

வரை முறை

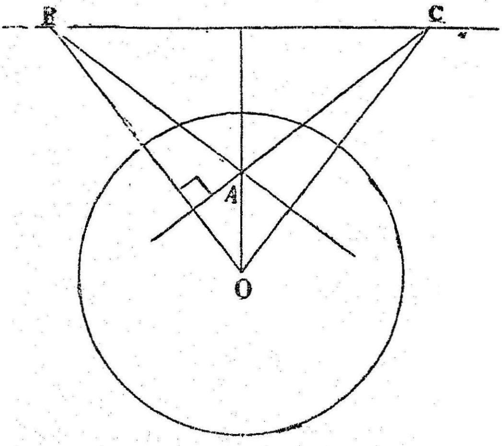
ஏதாவது ஒரு புள்ளி A யைக் குறிக்க. வட்டம் (O) வுக்கு A யின் போலார் வரைக.

A யின் போலாரில் ஏதாவது ஒரு புள்ளி B யைக்குறிக்கவும். OB யைச் சேர்ந்து அதற்கு A யிலிருந்து ஒரு லம்பம் வரைக.

இந்த லம்பம் A யின் போலாரை C யில் சந்திக்கட்டும்.

$\triangle$ ABC, தன்னிசை முக்கோணமாகும்.

நிரூபணம். A யின் போலார் BC ——— (1)
A யின் போலார் B வழிச் செல்வதால்,
B யின் போலார் A வழிச் செல்லும்.



II படம் 33

AC, OB க்குச் செங்குத்தாக வரையப்பட்டிருப்பதால்,
AC, B யின் போலார் ஆகும். ——(2)
A யின் போலார் C வழிச் செல்கிறது.
∴ C யின் போலார் A வழிச் செல்கிறது.
B யின் போலாரும் C வழிச் செல்கிறது.
∴ C யின் போலார் B வழியும் செல்லும்.
∴ C யின் போலார் AB. ——(3)
∴ $\triangle ABC$ தன்னிசை முக்கோணம்.

குறிப்பு :

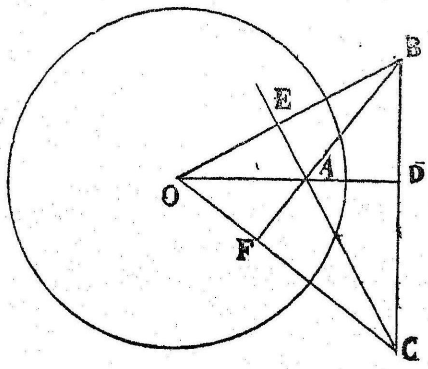
இந்த முறைப்படி நாம் A என்னும் ஏதாவது ஒரு புள்ளி எடுத்தோம். மேலும் A யில் போலாரில், B என்பதும் ஏதாவது ஒரு புள்ளி.

∴ ஒரு வட்டத்துக்கு எண்ணற்ற தன்னிசை முக்கோணங்கள் வரையலாம்.

வரையறை

ஒரு வட்டத்துக்கு ஒரு முக்கோணம் தன்னிசை முக்கோணமானால், அந்த முக்கோணத்துக்கு அந்த வட்டம் போலார் வட்டம் ஆகும்.

(1) போலார் வட்டத்தின் மையம் தன்னிசை முக்கோணத்தின் குத்து மையம் (ortho centre) ஆகும்.



II படம் 34

$\triangle ABC$ தன்னிசை முக்கோணம்.

OA, OB, OC இவற்றைச் சேர்த்து, BC, CA, AB இவற்றை முறையே D, E, F இல் சந்திக்கும்படி நீட்டி விடவும்.

BC, A யின் போலார்.

$\therefore \quad OAD \perp BC$.

CA, B யின் போலார்.

$\therefore \quad OE \perp AC$.

AB, C யின் போலார்.

$\therefore \quad OFC \perp AB$.

$\therefore \quad O$, $\triangle ABC$ யின் குத்து மையமாகும். (Ortho centre) இதிலிருந்து,

(1) $\triangle ABC$ யில் $\angle A$ விரிகோணமாக இருந்ததால், O முக்கோணத்துக்கு வெளியே இருக்கும். ($OA \cdot OD = r^2$ ஆகையால்)

r க்கு உண்மையான மதிப்பு உண்டு. (r is real)
$\therefore$ உண்மையான ஒரு போலார் வட்டம் கிடைக்கிறது.

(2) $\triangle ABC$ யில் $\angle A$, செங்கோணமாக இருந்தால் O, A யுடன் பொருந்தும் அப்பொழுது போலார் வட்டம் ஒரு புள்ளி வட்டமாகும். அது புள்ளி A யாகும்.

(3) $\triangle$ ABC யில் முக்கோணங்கள் மூன்றும் குறுங்கோணங்களாக இருந்தால், O முக்கோணத்தின் உள்ளே இருக்கும். ஆரம் $= \sqrt{OA \cdot OD} =$

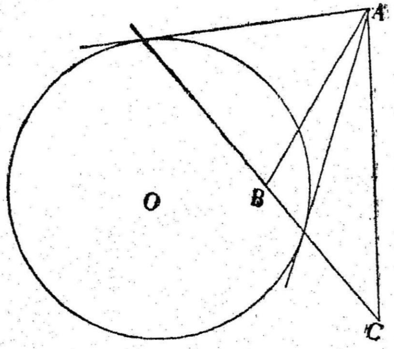
$OA \cdot OD$ நெகடிவ் (எதிரெண்) எண்ணாகும்.

∴ வட்டத்தின் ஆரம் கற்பனைக் கோடு.

∴ வட்டமும் உண்மை வட்டம் அல்ல; அது கற்பனை வட்டமே.

(4) ஒரு வட்டத்திற்கு எண்ணற்ற தன்னிசை முக்கோணங்கள் வரைய முடியும் என்றாலும், ஒரு தன்னிசை முக்கோணத்துக்கு ஒரே போலார் வட்டம்தான் வரைய முடியும்.

(2) ஒரு ஜதை துணையியப் புள்ளிகளும், அவற்றைச் சேர்க்கும் கோட்டின் போலும் ஒரு தன்னிசை முக்கோணத்தை உண்டாக்கும்.



II படம் 35

B, C துணையியம் புள்ளிகள்.
A, BC யின் போல்.
$\triangle$ ABC, தன்னிசை முக்கோணம்.

நிருபிக்க : B, C துணையியப் புள்ளிகள்.
∴ B யின் போலார் C வழிச் செல்லும்.
BC, A யின் போலார்.
∴ B யின் போலார் A வழிச் செல்லும்.
∴ B யின் போலார் AC. ——— (1)
A யின் போலார் BC —— (கொள்கை 2)

∴ AB யின் போல் C.

(அ-து) C யின் போலார் AB. —— (3)

∴ △ ABC, தன்னிசை முக்கோணம்.

(3) ஒரு ஜதை துணையியக் கோடுகளும், அவை சந்திக்கும் புள்ளியின் போலாகும் ஒரு தன்னிசை முக்கோணத்தை உண்டாக்கும்.

II படம் 32 பார்க்கவும்.

AB, AC துணையியக் கோடுகள்.

BC, A யின் போலார்.

△ ABC, தன்னிசை முக்கோணம்.

நிருபணம் : AB யின் போல் AC யில் இருக்கிறது.

∴ AC யின் போல் AB யில் இருக்கிறது.

BC யின் போல் A. அது AC யில் இருக்கிறது.

∴ AC யின் போல் BC யில் இருக்கிறது.

∴ AC யின் போல் B ஆகும். ——(1)

BC யின் போல் A. (கொள்கை) ——(2)

∴ AB யின் போல் C ஆகும். (தேற்றம் 21)

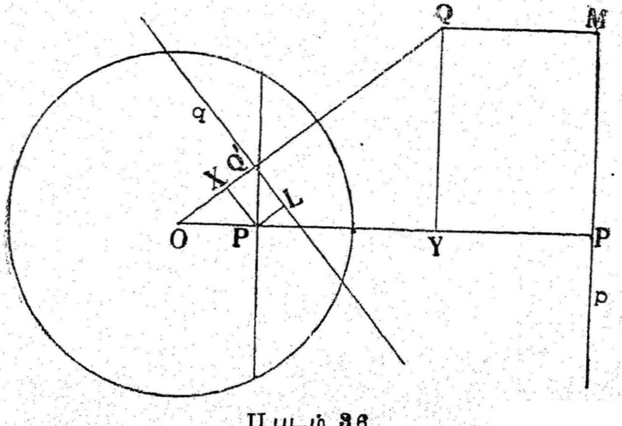
∴ △ ABC தன்னிசை முக்கோணம். (கிளை 3)

தேற்றம் 22

சால்மன் தேற்றம்

வட்டம் (O) வின் தளத்தில் P, Q இரு புள்ளிகள் ஆனால்,

$$\frac{OP}{OQ}=\frac{P \text{ யிலிருந்து } Q \text{ வின் போலாருக்குள்ள தூரம்}}{Q \text{ விலிருந்து } P \text{ யின் போலாருக்குள்ள தூரம்}}$$



II படம் 36

கொள்கை : (1) P, Q என்பன இரண்டு புள்ளிகள்.
(2) வட்டம் (O) வுக்கு P, Q இவற்றின் போலார்கள் p, q.
(3) PL, QM இவை P, Q விலிருந்து q, p இவற்றிலிருந்து வரையப்பட்ட குத்துக் கோடுகள்.

நிரூபிக்க: $\dfrac{OP}{OQ}=\dfrac{PL}{QM}$.

நிருபணம் : OP, OQ முறையே p, q யை P', Q' இல் வெட்டட்டும்.

PX, QY முறையே OQ, OPக்குக் குத்துக்கோடுகள்.

$\triangle OPX$, $\triangle OQY$ இல்

$\angle PXO = \angle QYO = 90°$. (வரைதல்படி)

$\angle O$ பொது.

$\therefore \triangle OPX \mid\mid\mid \triangle OQY$.

$\therefore \dfrac{OP}{OQ}=\dfrac{OX}{OY}$

$\therefore OP \cdot OY = OQ \cdot OX$.

ஆனால் $OP \cdot OP' = OQ \cdot OQ' = r^2$.

$\therefore OP(OP' - OY) = OQ(OQ' - OX)$

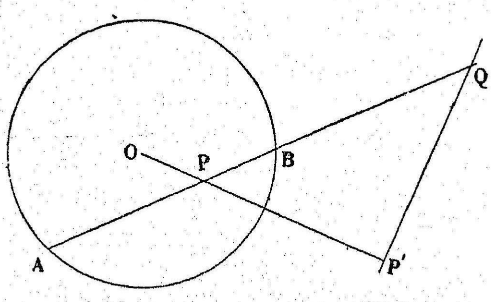
$\therefore OP(YP') = OQ(Q'X)$

$\therefore OP \cdot QM = OQ \cdot PL$

$\therefore \dfrac{OP}{OQ} = \dfrac{PL}{QM}$.

தேற்றம் 23

ஒரு வட்டத்தின் எந்த நாணையும் அதிலுள்ள இரண்டு துணையியப் புள்ளிகள் இசையாகப் பிரிக்கும்.



கொள்கை : (1) வட்டம் (O) வில் AB ஒரு நாண்.
(2) AB யில் P, Q ஒரு ஜதை துணையியப் புள்ளிகள்.

நிரூபிக்க : $(AB, PQ) = -1$ என.

நிருபணம் : OPயைச் சேர்த்து நீட்டி விடுக. Q விலிருந்து OP க்கு QP' என்னும் லம்பம் வரைக. P யின் போலார் Q வழிச் செல்லும். மேலும் OP க்குக் குத்தாகும்.

$\therefore$ QP', P யின் போலாராகும்.
$\therefore$ P', P யின் தன் மாற்றுப் புள்ளி.
$\therefore$ வட்டம் $PP'Q$ வட்டம் (O).
$\therefore$ $\angle PP'Q = 90°$
வட்டம் $PP'Q$ வுக்கு PQ ஒரு வட்டம்.
$\therefore$ PQ வை AB இசையாகப் பிரிக்கிறது.
$\therefore$ AB யை PQ இசையாகப் பிரிக்கிறது.

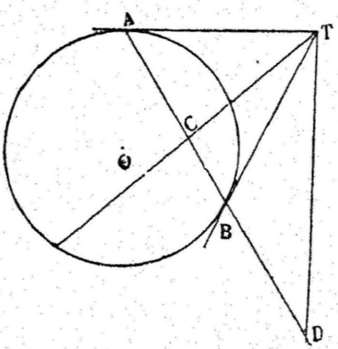
மாற்று நிருபணம்

P, Q துணையியப் புள்ளிகள்.
$\therefore$ P யின் போலார் Q வழிச் செல்லும்
(அ - து) AB யை Pயின் போலார் Q வில் வெட்டுகிறது.
$\therefore$ AB யை PQ இசையாகப் பிரிக்கிறது.

(தேற்றம் 17)

தேற்றம் 24

ஒரு வட்டத்துக்கு ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லும் துணையியக் கோடுகளும், அந்தப் புள்ளியிலிருந்து வட்டத்துக்கு வரையப் படும் தொடுகோடுகளும் இசைக் கோட்டுக் கற்றையாகும்.



II படம் 38

கொள்கை : (1) வட்டம் (O) விற்கு TC, TD துணையியப் புள்ளிகள்

(2) TA, TB வட்டத்துள் தொடுகோடுகள்.

நிருபிக்க : $T(AB, CD) = -1$ என.

நிருபணம் : TC, TD துணையியக் கோடுகள்

(கொள்கை)

$\therefore$ TC யின் போல் TD யில் இருக்கிறது. AB, T யின் தொடுநாண்.

$\therefore$ AB, T யின் போலார்.

$\therefore$ AB யின் போல் CT யில் இருக்கிறது.

$\therefore$ CT யின் போல் AB யில் இருக்கிறது.

$\therefore$ CT யின் போல் TD, AB இவற்றில் இருக்கிறது.

$\therefore$ CT யின் போல் D யாகும்.

$\therefore$ D, C இவை AB இசையாகப் பிரிக்கின்றன.

(தேற்றம் 17 கிளை 2)

மறுதலை

ஒரு வட்டத்திற்கு ஒரு புள்ளியிலிருந்து வரையப்பட்ட தொடு கோடுகளும் அப்புள்ளி வழியே செல்லும் இன்னும் 2 கோடுகளும் இசைக்கோட்டுக் கற்றையானால், அந்த இரண்டு கோடுகளும் துணையியக் கோடுகள்.

கொள்கை : (1) TA, TB விட்டத்தின் தொடுகோடுகள்.

(2) $T(AB, CD) = -1$.

நிருபிக்க : TC, TD துணையியக் கோடுகள் என.

நிருபணம் : T யின் போலார் AB, C வழிச் செல்கிறது.

$\therefore$ C யின் போலார் T வழிச் செல்கிறது.

மேலும் $T(AB, CD) = -1$.

$\therefore$ $(AB, CD) = -1$.

$\therefore$ C யின் போலார் D வழிச் செல்லும்.

$\therefore$ C யின் போலார் TD யாகும்

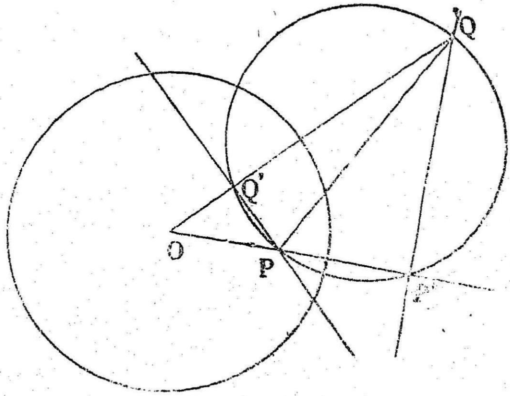
(அ-து) TD யின் போல் TC யில் உள்ளது.

TD, TC துணையியக் கோடுகள்.

மாதிரிகள்

ஒரு வட்டத்துக்கு இருபுள்ளிகள் துணையியப் புள்ளிகள் ஆனால் அவற்றைச் சேர்க்கும் கோட்டை விட்டமாகவுடைய வட்டம், முதல் வட்டத்தைக் குத்தாக வெட்டும்.

கொள்கை : (1) வட்டம் (O) வுக்கு P, Q துணையியப் புள்ளிகள்.



II படம் 39

நிருபிக்க : PQ வை விட்டமாகவுடைய வட்டம், வட்டம் (O) வைக் குத்தாக வெட்டும் என.

நிருபணம் : PQ வை விட்டமாகவுடைய விட்டம் OP யை P' இல் வெட்டட்டும். P' Q வைச் சேர்.

அரை வட்டத்திலுள்ள $\angle PX'Q = 90°$. P, Q துணையியப் புள்ளிகள் ஆதலால், OP க்கு Q விலிருந்து வரையப்படும் செங்குத்துக்கோடு P யின் போலார் ஆகும்.

$\therefore$ P' Q, P யின் போலார்.

$\therefore$ P', P யின் தன்மாற்றுப் புள்ளி.

$\therefore$ PQ வை விட்டமாகவுடைய வட்டம் P'P, என்னும் தன்மாற்றுப் புள்ளிகள் வழிச் செல்கிறது.

$\therefore$ அது வட்டம்(O) வைக் குத்தாக வெட்டுகிறது.

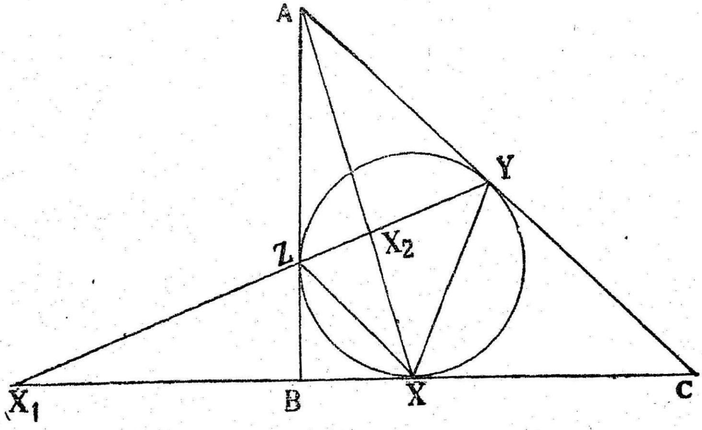
(தேற்றம் 16)

குறிப்பு: இந்த வட்டம் Q வின் தன்மாற்றுப் புள்ளி வழியும் செல்லும் PQ', Q வின் போலார் ஆகும்.

2. $\triangle$ ABC யின் உள் வட்டம், BC, CA, AB என்னும் பக்கங்களை X, Y, Z இல் தொடுகிறது.

$X(BZAY) = -1$ என நிருபிக்கவும்.

கொள்கை : (1) $\triangle ABC$ யின் உள் வட்டம், பக்கங்களை X, Y, Z-இல் தொடுகிறது.



II படம் 40

நிரூபிக்க : $X(BZAY) = -1$ என.

நிரூபணம் : YZ, BC யை X இலும் AX ஐ X_2 விலும் வெட்டட்டும் A, YZ இன் போல்.

$\therefore$ YZ இன்போல் AX இல் இருக்கிறது.

$\therefore$ AX இன்போல் YZ இல் இருக்கும். (தேற்றம் 21)

BC யின் போல் X.

$\therefore$ BC யின் போல் AX இல் இருக்கிறது.

$\therefore$ AX இன்போல் BC யிலும் இருக்கும்.

$\therefore$ AX இன்போல் X_1 ஆகும்.

$\therefore$ AX_1, AX துணையியக் கோடுகள். (தேற்றம் 24)

$\therefore$ $A(X_1 Z X Y_2) = -1.$

$\therefore$ $(X_1 \; Z X_2 \; Y) = -1.$

$\therefore$ $X(X_1 Z X_2 Y) = -1.$

$\therefore$ $X \; (BZAY) = -1.$

குறிப்பு இதை மெனியாஸ் தேற்றம் உபயோகித்து, $(BC, XX_1) = -1$ என்று நிரூபிக்கவும் செய்யலாம்.

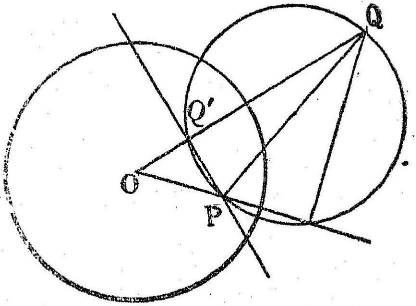
$A(X_1 BXC) = -1.$

$\therefore$ $(X_1 Z X_2 Y) = -1.$

$\therefore$ $(X_1 Z X_2 Y) = -1.$

$\therefore$ $X(BZAY) = -1.$

3. வட்டம் (O) வுக்கு P, Q காஞ்சுகேட் புள்ளிகள். (Conjugate points) வட்டத்தின் ஆரம் r. $PQ^2 = OP^2 + OQ^2 - 2r^2$ என நிருபிக்கவும்.



II படம் 41

கொள்கை (1) வட்டம் (O) வுக்கு P, Q காஞ்சுகேட் புள்ளிகள்.

(2) வட்டம் (O) வின் ஆரம் r.

நிருபிக்க $OP^2 + OQ^2 - 2r^2 = PQ^2$ என.

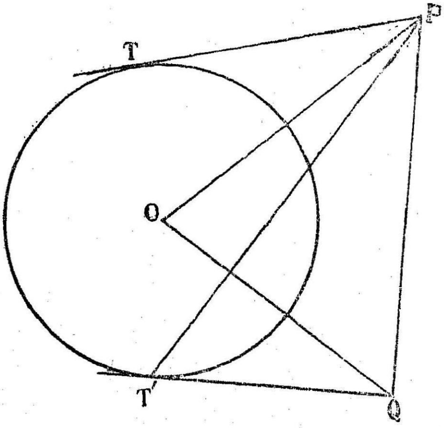
நிருபணம் OP, OQ யைச் சேர்.
Q வின் போலார் Q' ஐ வரை.
$\therefore OP'$, Q வின் தன்மாற்றுப்புள்ளி. மேலும் $PQ' \perp OQ$.
$\triangle OPQ$ வில், $\angle O$ குறுங்கோணம்,
$\therefore PQ^2 = OP_2 + OQ^2 - 2\, OQ \cdot OQ'$ ($\therefore \angle PQ'Q = 90°$.)
ஆனால் Q, Q' தன் மாற்றுப்புள்ளிகள்.
$\therefore OQ, OQ' = r^2$.
$\therefore PQ^2 = OP^2 + OQ^2 - 2r^2$.

4. ஒரு வட்டத்திற்கு P, Q என்னும் காஞ்சுகேட் புள்ளிகள் இரண்டும் வெளியே உள்ளன. PQ விலிருந்து PT, QT' வட்டத்துக்குத் தொடுகோடுகள் என்றால், P, Q வை மையமாகக் கொண்டு PT, QT' ஆரங்கள் உள்ள இரண்டு வட்டங்களும் குத்து வட்டங்கள் என நிருபிக்கவும்:

கொள்கை : (1) வட்டம் (O) க்கு P, Q காஞ்சுகேட் புள்ளிகள்.

(2) PT, QT', வட்டம் (O) வுக்குத் தொடுகோடுகள்.

நிரூபிக்க : P யை மையமாகவும் PT ஆரமாகவும் உள்ள வட்டமும், Q வை மையமாகவும் QT' ஆரமாகவும் உள்ள வட்டமும் குத்து வட்டங்கள் என.



II படம் 42

நிரூபணம் : மாதிரி 3 படி.

$PQ^2 = PO^2 + QO^2 - 2r^2$

$= PO^2 - r^2 + QO^2 - r^2.$

$= PT^2 + QT'^2$

$\therefore$ P, Q மையங்களாகவும், PT, QT' ஆரங்களாகவுமுள்ள வட்டங்களில் $d^2 = r_1^2 + r_2^2$ என்பது சரியாக உள்ளது.

$\therefore$ வட்டங்கள் குத்து வட்டங்கள்.

5. ஒரு வட்டத்தில் AB என்னும் நாணின் போல் P. PCD வட்டத்தை C, Dயில் தெட்டுகிறது. O, AB யின் மையப்புள்ளி. CO, வட்டத்தை K யில் வெட்டுகிறது.

OP, $\angle KOD$ யின் இரு சமவெட்டி என நிரூபிக்கவும்,

கொள்கை : (1) AB ஒரு நாண்.

(2) P, AB யின்போல்.

(3) $P\,CD$ வட்டத்தை C,D யில் வெட்டுகிறது

(4) O, AB யின் மையப்புள்ளி)

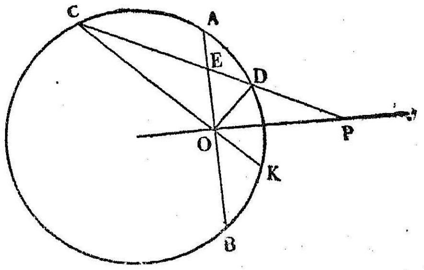
(5) CO, வட்டத்தை K யில் வெட்டுகிறது.

நிரூபிக்க : OP $\angle KOD$ யின் இரு சமவெட்டி என,

நிரூபணம் : AB, CD யை E யில் வெட்டட்டும்.

P யின் போலார் AB, E வழிச்செல்கிறது.

$\therefore$ E யின் போலார் P வழிச்செல்லும்.



II படம் 43

$\therefore$ P, E காஞ்சுகேட் புள்ளிகள்.

$\therefore$ $(CD, EP) = -1$. (தேற்றம் 23)

$\therefore$ $O\ (CEDP) = -1$. ஆனால் $OE \perp OP$.

$\therefore$ OE, OP என்னும் கோடுகள் $\angle\ COD$ யின் இரு சம வெட்டிகள்.

$\therefore$ OP, $\angle\ DOK$ யின் இரு சமவெட்டி.

பயிற்சி 11 (a)

1. A, B என்னும் இரண்டு புள்ளிகளின் போலார்கள், C யில் வெட்டினால், AB, C யின் தன் மாற்றுப் புள்ளியான C' வழிச் செல்லும் என்று நிரூபிக்கவும்.

2. a, b, c என்னும் கோடுகள் A, B, C யின் என்னும் புள்ளிகளின் போலார்கள். AB யின் போல் (ab), BC யின் போல் (bc), CA யின் போல் (ca) என்று நிரூபிக்கவும்.

3. வட்டம் (O) க்கு A, B யின் போலார்கள் P யில் வெட்டினால், OP, AB க்குச் செங்குத்துக் கோடு என நிரூபிக்கவும்.

4. P, Q, வட்டம் (O) விற்குக் காஞ்சுகேட் புள்ளிகள். PQ வின் மையப்புள்ளி O_1, P, Q வை விட்டமாகவுடைய வட்டம் வட்டம் (O) வை R இல் வெட்டுகிறது. $\angle\ ORO_1 = 90°$ என நிரூபிக்கவும்.

5. AB என்னும் விட்டத்தில் வட்டத்துக்கு வெளியே P என்னும் புள்ளி இருக்கிறது. CD, P யின் தொடுநாண். CD, AB யை Q வில் வெட்டினால், $(AQ, BP) = -1$ என காட்டுக.

பயிற்சி 11 (b)

1. ஒரு வட்டத்தில் A, B, C, D இசை வட்டப் புள்ளிகளானல் AC யும், A யில் வரையப்படும் தொடுகோடும், காஞ்சுகேட் கோடுகள் என நிருபிக்கவும்.

2. ஒரு வட்டத்தில் AB, P யின் தொடுகோடு நாண். CD P வழிச் செல்லும் மற்ருெரு நாண். D யில் வரையப்பட்ட தொடுகோடு ABயை Q வில் வெட்டுகிறது. C யில் வரையப் படும் தொடுகோடும் Q வழியே செல்லும் என நிருபிக்கவும்.

3. $\triangle ABC$ யின் சுற்று வட்டத்துக்கு A, B என்னும் புள்ளி களில் தொடுகோடுகள் P யில் வெட்டுகின்றன. C யில் தொடு கோடு AB யை Q வில் வெட்டுகிறது. PC, AB யை R இல் வெட்டுகிறது. (1) வட்டம் ABC க்கு PC, PQ துணையியக் கோடுகள் என நிருபிக்கவும்.

AB யை $Q R$ ஹார்மோனிக்காகப் பிரிக்கின்றன என்று நிரு பிக்கவும்.

4. AB யை விட்டமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தை மற்ருெரு வட்டம் குத்தாக வெட்டுகிறது. இந்த வட்டத்துக்கு $A_1 B$ காஞ்சுகேட் புள்ளிகள் என நிருபிக்கவும்.

5. AB ஒரு வட்டத்தின் விட்டம். P வட்டத்தின் ஒரு புள்ளி. $PQ \perp AB$. B யில் தொடுகோடு P யில் தொடு கோட்டை C யிலும், AP யை D யில் வெட்டுகிறது. $BC = CD$ என நிருபிக்கவும்.

6. ஒரு விட்டத்தில் A, B, C, D இசை விட்டப்புள்ளி களானல் AC, BD காஞ்சுகேட் கோடுகள் என நிருபிக்கவும்.

7. ஒரு வட்டதில் AB, CD என்னும் நாண்கள் துணையியக் கோடுகள். A, B, C, D இசை வட்டப்புள்ளிகள் என நிருபிக்கவும்.

8. ஒரு தன்னிசை முக்கோணத்தில் பக்கங்களை, விட்டங் களாக உள்ள வட்டங்கள் போலார் வட்டத்தைக் குத்தாக வெட்டுகின்றன என நிருபிக்கவும்.

9. P, Q வட்டம் (O) வுக்குத் துணையியம் புள்ளிகள். R, PQ யின் போல்.

$OP^2 - OQ^2 = RP^2 - RQ^2$ என நிருபிக்கவும்.

10. ஒரு வட்டத்தில் AB, P யின் தொடு நாண். AC, PBக்கு இணையான மற்றொரு நாண் PC, வட்டத்தை மறுபடியும் D யில் வெட்டுகிறது. AD, PB யை E இல் வெட்டுகிறது. $PE = EB$ என நிரூபிக்கவும்.

11. ஒரு விட்டத்தில் P யின் தொடு நாண் QR. AB, P வழிச் செல்லும் விட்டம். QR, AB யை O வில் வெட்டுகிறது.

கீழ்க் கண்டவற்றை நிரூபிக்கவும்:—

(1) AB யை, O, P இசையாகப் பிரிக்கின்றன.

(2) QB, $\angle PQR$ இன் இரு சம வெட்டி.

(3) $\triangle PQR$ இன் உள் வட்ட மையம் B யாகும்.

(4) QA, QB, PR யை இசையாகப் பிரிக்கின்றன.

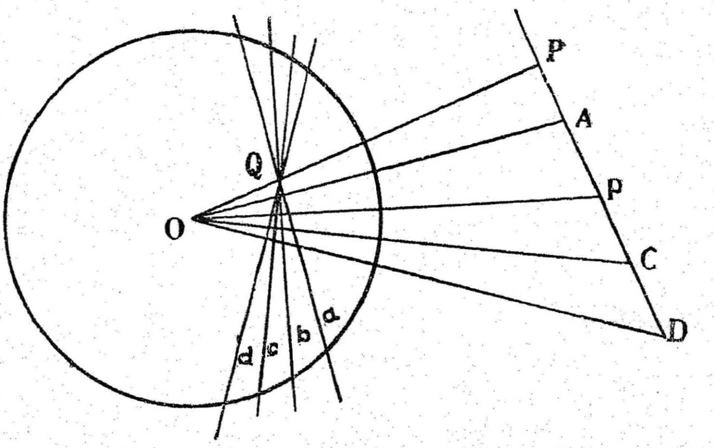
(5) O வழியே Q க்கு இணையாக வரையப்பட்ட ஒரு கோடு QA யை X இலும் PQ வை Y யிலும் வெட்டுகிறது. $OX = XY$.

(6) OLM என்னும் கோடு BQக்குச் செங்குத்து. அது BQ வை L இலும் PQ வை M இலும் வெட்டினால் $OL = LM$.

12. ஒரு விட்டத்தில் நாண் AB யின் போல் P. CD என்னும் மற்றொரு நாண் P வழிச் செல்கிறது. AB, CD யை Q வில் வெட்டுகிறது. PQ வை விட்டமாகவுடைய வட்டம் முதல் வட்டத்தைக் குத்தாக வெட்டுகிறது என நிரூபிக்கவும்.

தேற்றம் 25

ஒரு இசைப்புள்ளி வரிசையிலுள்ள புள்ளிகளின் போலார்கள் இசைக்கோட்டுக் கற்றையாகும்.



II படம் 44

கொள்கை : (1) $ABCD$ ஒரு இசைப்புள்ளி வரிசை.
(2) a,b,c,d முறையே A, B,C,D யின் போலார்கள்.

நிரூபிக்க் : $abcd$ ஒரு இசைக்கோட்டுக் கற்றை என.

நிரூபணம் : OA, OB, OC, OD யைச் சேர்க்கவும்.
O விலிருந்து $ABCD$ க்கு OP என்னும் லம்பம் வரையவும்.
Q, P யின் தன் மாற்றுப்புள்ளி ஆகட்டும்.
∴ Q, $PABCD$ என்னும் கோட்டின் போல் ஆகட்டும்.
∴ Q வின் போலார் A வழிச் செல்கிறது.
∴ A யின் போலார் a, Q வழிச் செல்லும். அது போலவே b, c, d, என்னும் கோடுகள் Q வழிச் செல்லும் என நிரூபிக்கலாம்.

∴ a,b,c,d, என்னும் கோடுகள் Q வில் சந்திக்கின்றன.
Q, A யின் போலார்.
∴ $OA \perp a$, அதுபோலவே, OB, OC, OD; முறையே b, c, d என்னும் கோடுகளுக்குச் செங்குத்துக் கோடுகள்.
∴ OA, OB, OC, OD இவற்றிற்கு இடையேயுள்ள கோணங்கள் முறையே a,b,c,d இவற்றுக்கு இடையே உள்ள கோணங்களுக்குச் சமம்.

$$\therefore O(ABCD) = (abcd)$$
ஆனுல் $O\ (ABCD) = (ABCD) = -1$. (கொள்கை)
$$\therefore (abcd) = -1.$$

மறுதலை

ஒரு இசைக்கோட்டுக் கற்றையின் போல்கள் இசைப்புள்ளி வரிசையாகும்.

II படம் 41 பார்க்க.

கொள்கை : (1) $abcd$ ஒரு இசைக் கோட்டுக் கற்றை. அவை Q வில் சந்திக்கின்றன.
(2) வட்டம் (O) கொடுத்திருக்கிறது.
(3) A, B, C, D இவை முறையே a, b, c, d இவற்றின் போல்கள்.

நிருபிக்க : $ABCD$ ஒரு இசைப்புள்ளி வரிசை என.

நிருபணம். (1) OA, OB, OC, OD யைச் சேர்.
A யின் போலாரான Q, Q வழிச் செல்கிறது.
∴ Q வின் போலார் A வழிச்செல்லும் அது போலவே, Q வின் போலார் B, C, D வழிச்செல்லும் என நிருபிக்கலாம்.

∴ Q வின் போலார் A, B, C, D வழியே செல்லும் ஒரு நேர் கோடு.

∴ $ABCD$ ஒரு நேர்கோடு.

∴ Q, A யின் போலார்.

∴ $OA \perp a$.

அது போலவே, b, c, d இவை A, OB, OC, OD க்குக் குத்துக் கோடுகள் என நிரூபிக்கலாம்.

∴ OA, OB, OC, OD இவற்றுக்கு இடையே உள்ள கோணங்கள் a, b, c, d இவற்றுக்கு இடையே உள்ள கோணங்களுக்குச் சமம்.

$$\therefore O(ABCD) = (abcd)$$

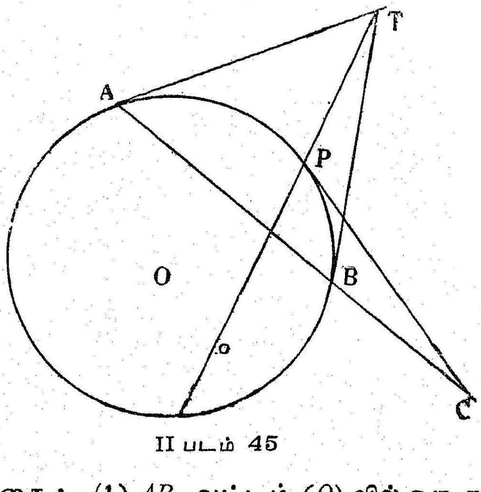
$$\therefore (ABCD) = O(ABCD)$$

$$= (abcd)$$

$$= -1. \qquad \text{(கொள்கை)}$$

$$\therefore (ABCD) = -1.$$

மாதிரிகள் 1. AB ஒரு விட்ட நாண். அந்த வட்டத்தின் மேல் ஏதாவது ஒரு புள்ளி P யில் தொடுகோடு AB யை C யில் சந்திக்கிறது. A, B யில் தொடுகோடுகளின் வெட்டுப்புள்ளி வழியாக C யின் போலார் செல்லும் என நிரூபிக்கவும்.



II படம் 45

கொள்கை : (1) AB, வட்டம் (O) வில் ஒரு நாண்.

(2) P யில் தொடுகோடு AB யை C யில் சந்திக்கிறது.

(3) C யின் போலார்.

நிரூபிக்க : A, B யில் தொடுகோடுகள் T யில் சந்திக் கட்டும்.

C யின் போலாராகிய T வழிச் செல்லும் என.

நிருபணம் : A, B, C ஒரு கோடமை புள்ளிகள்.

∴ அவற்றின் போலார்கள் ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லும்.

A யின் போலார் A யில் தொடுகோடு.

B யின் போலார் B யில் தொடுகோடு.

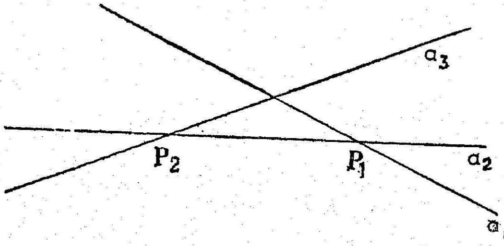
C யின் போலார்

∴ A யில் தொடுகோடு, B யில் தொடுகோடு. இவை ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள்.

∴ T வழிச் செல்லும்.

உறைப்படம் (என்வெலப், Envelope)

ஒரு புள்ளி சில நியதிகளுக்குட்பட்டு நகரும்போது ஒரு நியமப்பாதை உண்டாகிறது. ஒரு நேர்கோடு சில நியதிகளுக் குட்பட்டு நகரும்போது என்ன உண்டாகிறது என்று பார்ப் போம்.

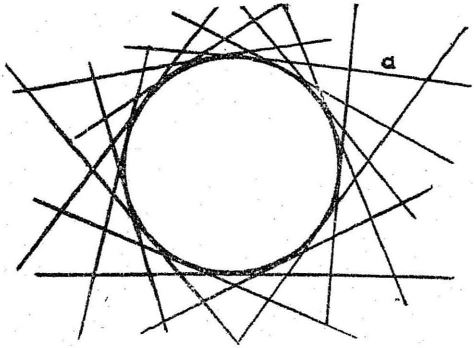


II படம் 46

a என்னும் நேர்க்கோடு நகரும்போது a_1, a_2, a_3 என்னும் 3 கோடுகளில் அமைகிறது என்று கொள்வோம். a_1, a_2, P இலும் a_2, a_3, P_2 இலும் வெட்டுகின்றன. a_1, a_2, a_3 வெகு அருகே இருக் கும்போது P_1, P_2 க்கு வெகு சமீபத்தில் இருக்கும். முடிவில் a_1, a_2, a_3 அடுத்தடுத்த கோடுகளாகும்போது, P_1, P_2 அடுத் தடுத்த புள்ளிகளாகும். ஆகவே a_2, P இருக்கும் வளைகோட் டுக்கு ஒரு தொடுகோடு ஆகும். a நகரும்போது, P யும் நகரும். P ஒரு வளைகோட்டில் அமைந்தால், a அதற்கு எப்போதும் தொடுகோடாகும். இந்த வளைகோட்டுக்கு உறைப்படம் அல்லது என்வெலப் (Envelope) என்கிறோம்.

(உ-ம்) ஒரு நேர்கோடு, ஒரு கொடுக்கப்பட்ட புள்ளியிலிருந்து ஒரு குறிப்பிட்ட தூரத்தில் நகரும்போது அது எப்போதும் குறிப்பிட்ட தூரம் ஆரமாகவும், கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி மையமாகவும் உள்ள வட்டத்தைத் தொடும்.

அந்த வட்டம், கோட்டின் உறைப்படம் ஆகும்.



II படம் 47

நகரும் கோடு a எப்போதும் உறைப்படத்திற்கு வெளியே இருப்பதையும், உள்ளே வட்டம் இருப்பதையும், காண்க.

போல்என்ற போலாரின் இருபான்மை நெறித் தத்துவம்

A, என்னும் ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும், a என்னும் போலார் உண்டு. அது போலவே a என்னும் ஒவ்வொரு கோட்டுக்கும், A என்னும் போல் உண்டு. போல் போலாருக்கும் உள்ள இருபான்மை நெறித்தத்துவத்தைக் கீழே விளக்கியுள்ளோம்.

(ஒரு கோட்டிலுள்ள $ABCD$ என்னும் புள்ளி வரிசை இசைப் புள்ளி வரிசை என்றுல், அவற்றின் போலார்கள் $abcd$ இசைக் கோட்டுக்க் கற்றையாகும். ஆகையால்)

புள்ளி–போல்	கோடு–போலார்
(1) ஒரு புள்ளியின் போலார் மற்ருெரு புள்ளி வழிச் செல்லுமாயின், இரண்டாவது புள்ளியின் போலார் முதல் புள்ளி வழிச் செல்லும்.	ஒரு கோட்டின் போல், மற்ருெரு கோட்டில் இருக்குமாயின், இரண்டாவது கோட்டின் போல் முதல் கோட்டில் இருக்கும்.
(2) இரு காஞ்சுகேட் புள்ளிகளின் போலார்கள் காஞ்சுகேட் கோடுகள்.	இரு காஞ்சுகேட் கோடுகளின் போல்கள் காஞ்சுகேட் புள்ளிகள்.
(3) இசைப் புள்ளி வரிசையில் உள்ள புள்ளிகளின் போலார்கள் இசைக் கற்றையாகும்.	இசைக் கோட்டுக் கற்றையில் உள்ள கோடுகளின் போல்கள் இசைப்புள்ளி வரிசையாகும்.
(4) இரண்டு புள்ளிகளின் போலார்கள் வெட்டும் புள்ளி அந்தப் புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டின் போலாகும்.	இரண்டு கோடுகளின் போல்களை இணைக்கும் கோடு அந்தக் கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியின் போலாராகும்.
(5) ஒரு நாணிலுள்ள ஒரு ஜதை துணையியப் புள்ளிகள் அந்த நாணை இசையாகப் பிரிக்கின்றன.	ஒரு வட்டத்துக்கு வரையப்படும் தொடு கோடுகளை அப்புள்ளி வழிச் செல்லும் இரு துணையியக் கோடுகள் இசையாகப் பிரிக்கின்றன.
(6) ஒரு வட்டத்திலுள்ள எந்த நாணையும் அதில் ஏதாவது ஒரு புள்ளியும் அப்புள்ளியின் போலாரும் இசையாகப்பிரிக்கும்.	ஒரு வட்டத்துக்கு வரையப் பட்ட இரு தொடுகோடுகளை அவை சந்திக்கும் புள்ளி வழிச் செல்லும் ஏதாவது ஒரு கோடும், அப்புள்ளியையும் அக்கோட்டின் போலையும் சேர்க்கும் நான்காவது கோடும் இசையாகப் பிரிக்கின்றன.
(7) ஒரு கோட்டில் உள்ள பல புள்ளிகளின் போலார்கள் ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லும். அவை அக்கோட்டின் போல் வழிச் செல்லும்.	ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லும் பல கோடுகளின் போல்கள் ஒரு நேர் கோட்டில் அமையும். அவை அப்புள்ளியின் போலாரில் அமையும்.

மாணவர்கள் இன்னும் அப்பியாசங்களிலுள்ள தேற்றங்களை எழுதி அவற்றின் இருபான்மைத் தேற்றங்களை எழுதிப் பார்க்கலாம்.

பயிற்சி 12 (a)

1. 4 புள்ளிகள் கொண்ட ஒரு புள்ளி வரிசையின் குறுக்கு விகிதம், அவற்றின் போலார்களால் ஏற்படும் கோட்டுக் கற்றையின் குறுக்கு விகிதத்துக்குச் சமம் என நிரூபிக்கவும்.

2. இரண்டு புள்ளிகள் ஒரு வட்டமையத்தில் தாங்கும் கோணம் அவற்றின் போலார்களுக்கு இடையே உள்ள கோணம என நிரூபிக்கவும்.

3. AB யை விட்டமாகவுடைய வட்டம், ஒரு வட்டத்தின் மையம் O வழிச் சென்றால், வட்டம் (O) வுக்கு A, B யின் போலார்கள் செங்குத்துக் கோடுகள் என நிரூபிக்கவும்.

4. ஒரு முக்கோணத்தின் சுற்று வட்டத்தைப் பொறுத்து அதன் குத்துக் கோடுகளின் போல்கள் ஒரு கோடமைவன என நிரூபிக்கவும்.

5. A, B, C யின் போலார்கள் a, b, c ஆனால், AB, BC, CA யின் போல்கள் $(ab), (bc), (ca)$ ஆகும். இதன் இருபான்மை நெறித் தேற்றத்தை எழுதுக.

பயிற்சி 12 (b)

1. $\triangle ABC$ யின் பக்கங்கள் BC, CA, AB யை, அதன் உள் விட்டம் X, Y, Z இல் தொடுகின்றன. உள் வட்டத்துக்கு AX, BY, CZ இவற்றின் போல்கள் ஒரு கோடமைவன என நிரூபிக்கவும்.

2. $\triangle ABC$ யில் BC யை விட்டமாகவுடைய வட்டத்துக்கு, A, I, I, இவற்றின் போலார்கள் ஒரு புள்ளி வழிச் செல்வன என நிரூபிக்கவும்.

3. $ABCD$ ஒரு வட்ட நாற்கரம். CA, BD என்னும் மூலை விட்டங்கள் P யிலும், AB, CD என்னும் பக்கங்கள் Q விலும் சந்திக்கின்றன. வட்டத்துக்கு, AC, BD, PQ வின் போல்கள் ஒரு கோடமைவன என நிரூபிக்கவும்.

4. ஒரு நாற்கரத்தின் பக்கங்கள் $AB. BC, CD. DA$, ஒரு வட்டத்தை A', B', C', D' இல் தொடுகின்றன. $A'B', C'D'$, AC இவை ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள் என காட்டுக.

5. *ABCD* என்னும் வட்ட நாற்கரத்தில், *AB*, *CD*, *E* யிலும், *BC*, *AD*, *F* இலும், *AC*, *BD* *G* யிலும் வெட்டுகின்றன.

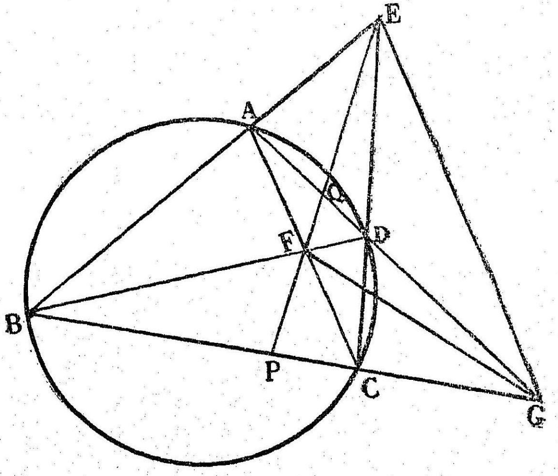
A, *D* இவற்றில் வட்டத்துக்குத் தொடுகோடுகள் *FG* யில் சந்திக்கும் என நிரூபிக்கலாம்.

6. ஒரு வட்டத்தின் மேலுள்ள புள்ளிகளுக்கு அதே மையமுள்ள மற்றொரு வட்டத்தின் போலார்கள் அடைக்கும் உறைப்படம் மற்றொரு பொது மைய வட்டமாகும்.

இதன் இருபான்மை நெறித் தேற்றம் எழுதுக.

தேற்றம் 26

ஒரு வட்டத்திலுள்ளே வரையப்பட்ட முழு நாற்கோணத்தின் மூலைப்புள்ளி முக்கோணம் அவ்வட்டத்திற்குத் தன்னிசை முக்கோணமாகும்.



II படம் 48

கொள்கை :

(1) *A*, *B*, *C*, *D* என்ற முழு நாற்கோணம் வட்டத்தில் வரையப்பட்டுள்ளது.

(2) *EFG* மூலைப்புள்ளி முக்கோணம்.

நிரூபிக்க:

△ *EFG*, வட்டம் *ABCD* க்குத் தன்னிசை முக்கோணம் என

நிருபணம்:

EF, AD யை Q விலும், BC யை P யிலும் வெட்டட்டும்.

முழு நாற்கோணம் A,B,C,D யில்,

$E\ (AFDG) = -1.$ (தேற்றம் 11)

$\therefore$ $(AQDG) = -1$. (குறுக்கு வெட்டி AG யில்)

$\therefore$ நாண் AD யில் Q, G காஞ்சுகேட் புள்ளிகள். (தேற்றம் 27)

(அ-து) G யின் போலார் Q வழிச் செல்லும்.

மேலும் $(BPCG) = -1$ (குறுக்கு வெட்டி BC யில்)

$\therefore$ நாண் BC யில் P,G காஞ்சுகேட் புள்ளிகள்.

$\therefore$ G யின் போலார் P வழிச் செல்லும்.

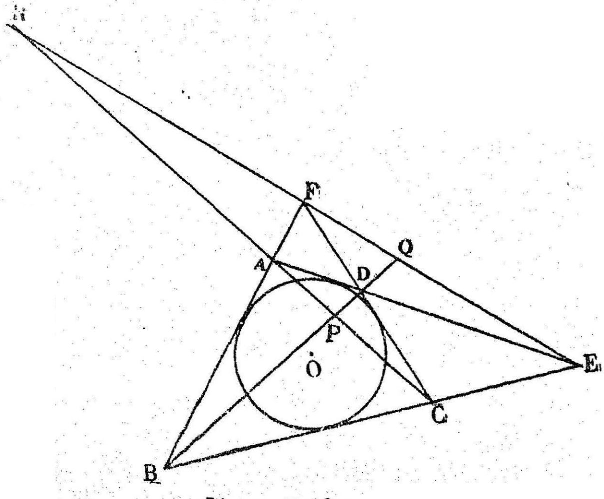
$\therefore$ G யின் போலார் PQ அல்லது EF.

அதுபோலவே, F இன் போலார் EG என்றும், E யின் போலார் FG என்றும் நிருபிக்கலாம்.

$\therefore$ $\triangle\ EFG$ தன்னிசை முக்கோணம்.

தேற்றம் 27

ஒரு வட்டத்தைச்சுற்றி வரையப்பட்ட முழு நாற்கரத்தின் மூலைவிட்ட முக்கோணம் வட்டத்திற்குத் தன்னிசை முக்கோணமாகும்.



II படம் 49

கொள்கை : (1) வட்டம் (O) வை AB, BC, CD, DA தொடுகின்றன.

(2) $\triangle PQR$, மூலைவிட்ட முக்கோணம்.

(3) A, B, C, D, E, F முழு நாற்கரத்தின் உச்சிப் புள்ளிகள்.

நிரூபிக்க : $\triangle PQR$ தன்னிசை முக்கோணம் என.

நிரூபணம் : நாற்கரம் $ABCD$ யில், ஒவ்வொரு மூலைவிட்டத்தையும் மற்ற இரண்டு மூலை விட்டங்களும் இசையாகப் பிரிக்கின்றன. (தேற்றம் 12)

$\therefore \quad (BPDQ) = 1.$

$\therefore \quad A\,(BPDQ) = -1.$

இவற்றில் AB, AD தொடுகோடுகள்.

$\therefore$ AP, AQ துணையியக் கோடுகள். (தேற்றம் 24)

$\therefore$ AP யின் போல் AQ வில் இருக்கிறது.

அது போலவே,

$C\,(BPDQ) = -1.$

CB, CD, தொடுகோடுகள்.

$\therefore$ CP, CQ துணையியக் கோடுகள்.

$\therefore$ CP யின் போல் CQ வில் இருக்கிறது.

(அ-து) AC யின் போல AQ, CQ இவை இரண்டிலும் இருக்கிறது.

(அ-து) AC யின் போல் Q ஆகும்.

(அ-து) PR இன் போல் Q ஆகும்.

அதுபோலவே, PQ வின் போல் R என்றும், QR இன் போல் P என்றும் நிரூபிக்கலாம்.

$\therefore$ $\triangle PQR$, தன்னிசை முக்கோணம்.

தேற்றம் 28

ஒரு வட்டத்தைச் சுற்றி வரையப்பட்ட முழு நாற்கரத்தின் மூலை விட்ட முக்கோணமும், அதன் பக்கங்கள் வட்டத்தைத் தொடும் புள்ளிகளான முழு நாற்கோணத்தின் மூலைப்புள்ளி முக்கோணமும் ஒன்றேயாகும்.

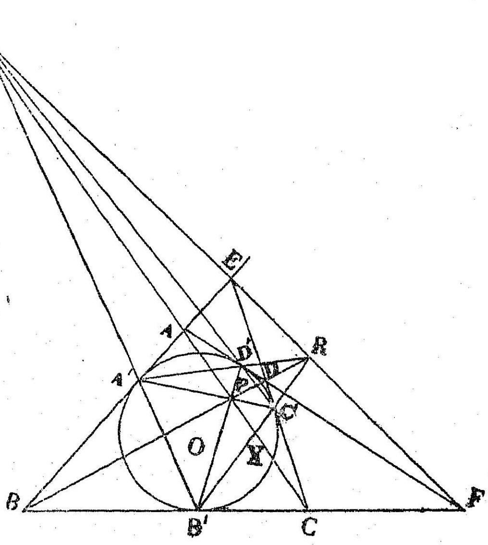
கொள்கை : (1) AB, BC, CD, DA ஒரு வட்டத்தை A', B', C', D' இல் தொடுகின்றன.

(2) AC, BD, P யில் வெட்டுகின்றன.

(3) AB, CD, E யில் வெட்டுகின்றன. AD, BC, F இல் வெட்டுகின்றன. EF ஒரு மூலை விட்டம்.

(4) AC, EF, Q வில் வெட்டுகின்றன. BD, EF, R இல் வெட்டுகின்றன.

(5) $\triangle PQR$, மூலைவிட்ட முக்கோணம்.



II படம் 50

நிருபிக்க: $\triangle PQR$, நாற்கோணம் A', B', C', D' இன் மூலைப்புள்ளி முக்கோணம் என.

நிருபணம்: $\triangle PQR$, $ABCD$ யின் மூலைவிட்ட முக்கோணம்.

$\therefore$ PQ, R இன் போலாராகும். (தேற்றம் 27)

AA^1, AD^1, A யிலிருந்து வட்டத்துக்குக் தொடுகோடுகள்.

$\therefore$ $A'D'$, A யின் போலாராகும்.

R இன் போலார் PQ என்பது A வழிச் செல்கிறது.

$\therefore$ A யின் போலார் R வழிச் செல்லும்.

(அ-து) $A'D'$, R வழிச் செல்லும்.

R இன் போலார் PQ, C வழிச் செல்கிறது.

$\therefore$ C யின் போலாரான $B'C'$, R வழிச் செல்லும்.

$\therefore$ $A'D'$, $B'C'$ இரண்டும் R இல் சந்திக்கின்றன.

(அ-து) நாற்கோணம் A', B', C', D' இன் ஒரு மூலைப் புள்ளி R, நாற்கரம் AB, BC, CD, DA யின் ஒரு மூலைவிட்ட முக்கோணத்தின் உச்சி R உடன் பொருந்துகிறது.

அது மாதிரியே நாற்கோணத்தின் மற்ற மூலைப் புள்ளிகளும் P, Q இவற்றோடு பொருந்தும் என நிரூபிக்கலாம்.

(அ-து) $\triangle\ PQR$, நாற்கோணம் A', B', C', D' இன் மூலைப் புள்ளி முக்கோணம் ஆகும்.

மாற்று நிருபணம்

கொள்கையும் படமும் அதுவே.

$\triangle\ PQR$, நாற்கரம் $ABCD$ யின் மூலைவிட்ட முக்கோணம்.

$\therefore$ PR, Q வின் போலாராகும். QR, P யின் போலாராகும். (தேற்றம் 27)

A, P, C, Q ஒரு கோடமைவன.

$\therefore$ அவற்றின் போலார்கள் ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள்.

A யின் போலார் $A'D'$.

P யின் போலார் QR.

C யின் போலார் $B'C'$.

Q வின் போலார் PR.

$\therefore$ $A'D'$, $B'C'$, PR, QR இவை ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள்.

PR, QR இவை R இல் சந்திப்பதால், $A'D'$, $B'C'$ உம் R வழிச் செல்லும்.

$A'D'$, $B'C'$ சந்திக்கும் புள்ளி, நாற்கோணம் A', B', C', D' இன் ஒரு மூலைப் புள்ளி.

$\therefore$ நாற்கோணம் A', B', C', D' இன் ஒரு மூலைப் புள்ளி R நாற்கரம் AB, BC, CD, DA யின் மூலை விட்ட முக்கோணத்தின் ஒரு உச்சி R உடன் பொருந்தும். அது போலவே நாற்கோணத்தின் மற்ற 2 மூலைப் புள்ளிகளும் P, Q வுடன் பொருந்தும் என நிரூபிக்கலாம்.

$\therefore$ $\triangle\ PQR$, நாற்கோணத்தின் மூலைப் புள்ளி முக்கோணம் ஆகும்.

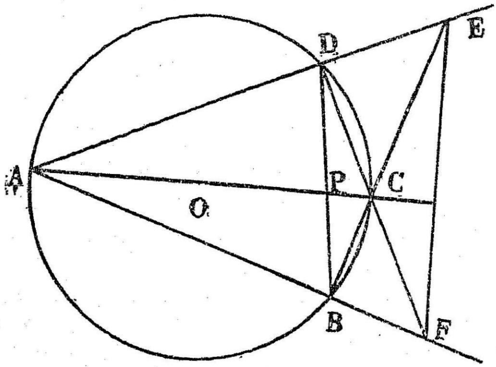
கிளைத் தேற்றம்

ஒரு நாற்கோணம் A, B, C, D ஒரு வட்டத்தில் வரையப்பட்டால், அதன் மூலைப்புள்ளி முக்கோணமும், A, B, C, D இவற்றில் வட்டத்துக்கு வரையப்பட்ட தொடுகோடுகளால் அடைபடும் நாற்கரத்தின் மூலைவிட்ட முக்கோணமும் ஒன்றேயாகும்.

மாதிரிகள்

(1) அடிக் கோலை மட்டும் உபயோகித்து ஒரு புள்ளியின் போலார் வரைய

வட்டம் (O) வும் P என்னும் புள்ளியும் கொடுக்கப்பட்டவை. P யில் போலார் வரைய.



II படம் 51

வரை முறை

P வழியே AC, BD என்னும் 2 நாண்கள் வரைக.
AD, BC யைச் சேர்க்க. அவை E யில் சந்திக்கட்டும்.
EF, P யின் போலாராகும்.

நிருபணம்: நாற்கோணம் A, B, C, D இல் P, E, F மூலைப் புள்ளிகள்.

$\therefore$ $\triangle$ PEF தன்னிசை முக்கோணம்.
$\therefore$ EF, P யின் போலாராகும். (தேற்றம் 26)

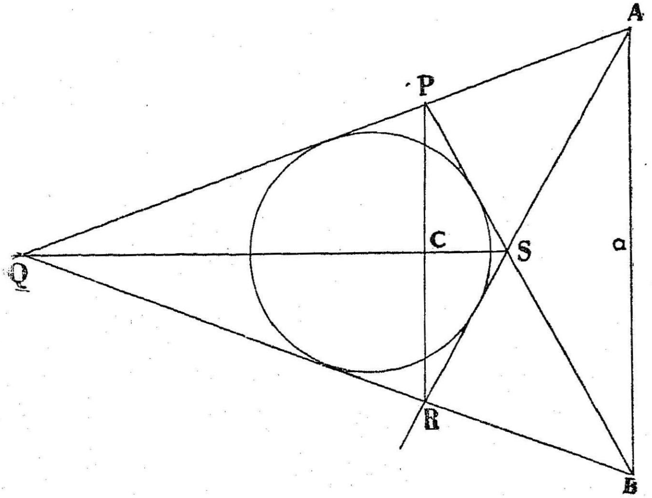
(2) **ஒரு நேர்கோட்டின் போல் கண்டுபிடிக்க.**

a என்னும் கோடும், வட்டமும் கொடுத்திருக்க, a வின் போல் கண்டுபிடிக்க

வரை முறை: கொடுக்கப்பட்ட கோட்டில் A, B என்னும் 2 புள்ளிகள் குறிக்கவும். A, B யிலிருந்து வட்டத்துக்குத் தொடு கோடுகள் வரைக.

அவை P, Q, R, S இல் வெட்டட்டும். PR, QS ஐச் சேர்க்கவும். அவை C யில் வெட்டட்டும்: C, AB யின் போல் ஆகும்.

நிரூபணம்: நாற்கரம் *PQRS*, வட்டத்தைச் சுற்றி வரையப்பட்டிருக்கிறது.



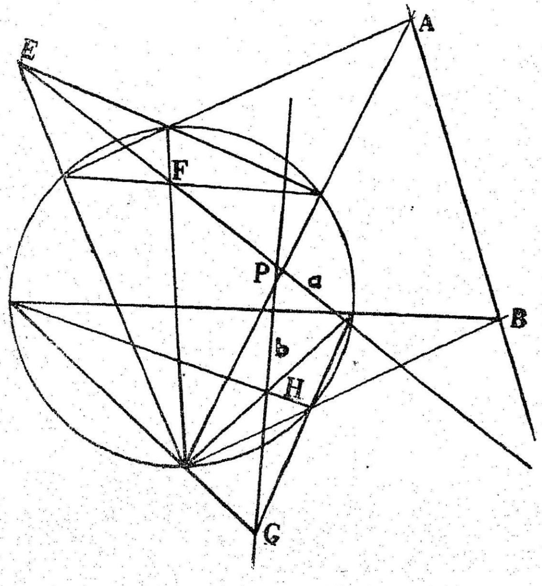
II படம் 52

AB, *PR*, *QS* அதன் மூலைவிட்டங்கள்.

C மூலைவிட்ட முக்கோணத்தின் ஒரு உச்சி.

∴ அது மூலைவிட்டம் *AB* யின் போல் ஆகும். (தேற்றம் 27)

(3) அடிகோலை மட்டும் உபயோகித்து ஒரு நேர்கோட்டின் போல் கண்டுபிடிக்க.



II படம் 53

கொடுக்கப்பட்ட கோட்டில் இரண்டு புள்ளிகள் எடுத்துக் கொள்க.

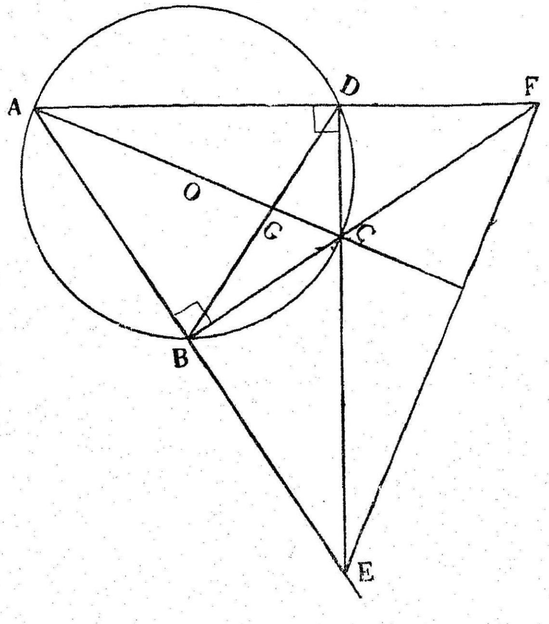
இரண்டு புள்ளிகளுக்கும் அடிகோலை உபயோகித்து மாதிரி 1 இல் காட்டியபடி போலார்கள் வரைக. அவை சந்திக்கும் புள்ளி கோட்டின் போல் ஆகும்.

படத்தில் *EF*, *A* யின் போலார்.

GH, *B* யின் போலார்.

∴ *P*, *AB* யின் போல் ஆகும்.

4. *AB*, *CD*, *E* யில் சந்திக்கின்றன. *AD*, *BC*, *F* இல் சந்திக்கின்றன. $\angle B = \angle D = 90°$. *AC*, *EF* க்குச் செங்குத்துக் கோடு என நிரூபிக்கவும்.



II படம் 54

கொள்கை : (1) *AB*, *CD*, *E* யில் சந்திக்கின்றன.

(2) *AD*, *BC*, *F* இல் சந்திக்கின்றன.

(3) $\angle B = \angle D = 90°$.

நிரூபிக்க : $AC \perp EF$ என.

நிரூபணம் : BD, AC யை G யில் வெட்டட்டும்.

$\angle B = \angle D = 90°$.

$\therefore$ (1) $ABCD$ வட்ட நாற்கரம்.

(2) AC வட்டத்தின் விட்டம்.

வட்டத்தின் மையம் O என்போம்.

O, AG யில் இருக்கிறது.

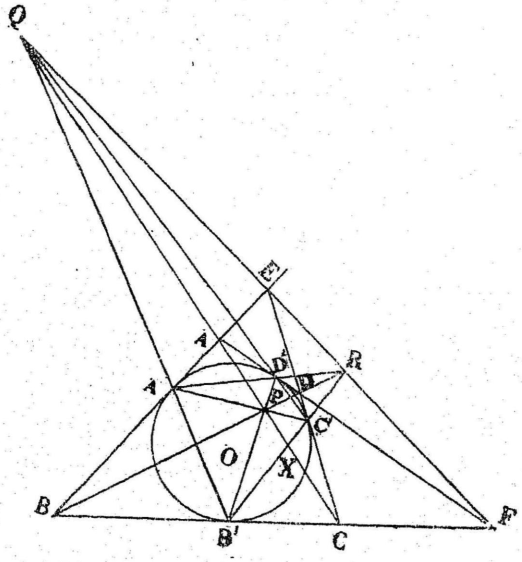
நாற்கோணம் A, B, C, D யின் மூலைப்புள்ளி முக்கோணம் EFG.

$\therefore$ EF, G யின் போலார். (தேற்றம் 26)

$\therefore$ EF, OG க்குச் செங்குத்துக்கோடு.

$\therefore$ $AC \perp EF$. (நி. வே)

5. AB, BC, CD, DA ஒரு வட்டத்தை A', B', C', D' இல் தொடுகின்றன. $A'C'$, $B'D'$, P யிலும், $A'D'$, $B'C'$, R இலும், $A'B'$, $C'D'$, Q விலும் சந்திக்கின்றன. கீழ்க்கண்டவற்றை நிரூபிக்கவும் :



II படம் 55

(1) AC, $B'C'$ ஐ X இல் சந்தித்தால் $(B'C', XR) = -1$.

(2) $QO \perp BD$

(3) $RO \perp AC$

(4) $PO \perp EF$

நிருபணம் : (1) A', B', C', D' மூலைப்புள்ளி முக்கோணம் PQR (தேற்றம் 28)

$\therefore$ $Q(B'PC'R) = -1$. (தேற்றம் 11)

$B'C'$, $A'D'$, R இல் சந்திக்கின்றன. (தேற்றம் 28)

$\therefore$ $B'R$ குறுக்கு வெட்டி எடுக்க,

$(B'XC'R) = -1$. ——(1)

(2) $\triangle PQR$ வட்டம் (O) வுக்குத் தன்னிசை முக்கோணம் (தேற்றம் 26, 27)

$\therefore$ O $\triangle PQR$ இன் குத்து மையம் (Orthocentre)

$\therefore$ $OP \perp QR$ ——(2)

(அ-து) $OP \perp EF$

$OQ \perp PR$

(அ-து) $OQ \perp BD$ (BD யும் PR உம் ஒரே கோடு) ——(3)

$OR \perp PA$

(அ-து) $OR \perp AC$ (AC யும், PQ உம் ஒரே கோடு) ——(4)

பயிற்சி 13 (a)

1. A, B, C, D ஒரு நாற்கோணம். அதில் $\angle B = \angle D = 90°$. ACயின் மையப் புள்ளியான O, நாற்கோணத்தின் மூலைப்புள்ளி முக்கோணத்திற்கு போலார் வட்ட மையம் என நிரூபிக்கவும்.

2. AB, BC, CD, DA ஒரு வட்டத்தை A', B', C', D' இல் தொடுகின்றன. AD, BC, T யில் சந்தித்தால் $(BB'CT) = -1$ என நிரூபிக்கவும்.

3. $ABCD$ ஒரு வட்ட நாற்கரம். AB, CD, E யிலும், AC, BD, F இலும், AD, BC, G யிலும் வெட்டுகின்றன. A, D யில் வட்டத்துக்கு வரையப்பட்ட தொடுகோடுகள் EF இல் சந்திக்கின்றன என நிறுவுக.

4. AB, BC, CD, DA ஒரு வட்டத்தை A', B', C', D' இல் தொடுகின்றன. $\triangle PQR$, A', B', C', D' இன் மூலைப்புள்ளி முக்கோணம்.

AB, CD ; AC, DA இவை வெட்டும் புள்ளிகள், $\triangle PQR$ இன் ஒரு பக்கத்தில் அமையும் என நிரூபிக்கவும்.

பயிற்சி 13 (b)

1. $ABCD$ ஒரு வட்ட நாற்கரம். முழு நாற்கரம் AB, BC, CD, DA யின் விட்டங்கள் AC, BD, EF, $\triangle PQR$ ஐ அமைக்கின்றன. PQ, QR, RP யை விட்டங்களாகக் கொண்ட வட்டங்கள், வட்டம் $ABCD$ யைக் குத்தாக வெட்டுகின்றன என நிரூபிக்கவும்.

2. $ABCD$ ஒரு வட்ட நாற்கரம். A, B, C, D யில் தொடு கோடுகள் A', B', C', D', E', F' என்னும் 6 புள்ளிகளில் சந்திக்கின்றன. AB, CD, E யிலும், AD, BC, F இலும், AC, BD, G இலும் சந்திக்கின்றன. A', B' முதலிய 6 புள்ளிகளும் EF, FG, GE ஒவ்வொன்றிலும் இரண்டு இரண்டாக அமையும் என நிரூபிக்கவும். அதிலிருந்து $A'B'C'D'E'F'$ என்னும் முழு நாற்கோணத்தின் மூலைவிட்டங்கள், $\triangle EFG$ யின் பக்கங்கள் என நிரூபிக்கவும்.

3. AB, BC, CD, DA ஒரு வட்டத்தை A', B', C', D' யில் தொடுகின்றன. AD, BC, T யில் சந்திக்கின்றன. BC யின் மையப் புள்ளி O ஆனால், $OB^2 = OB'. OT$ என நிரூபிக்கவும்)

4. AB, BC, CD, DA ஒரு வட்டத்தை A', B', C', D' இல் தொடுகின்றன. $A'B', C'D', R$ இலும், $A'D', B'C', Q$ விலும், $A'C', B'D', P$ யிலும் வெட்டுகின்றன. PX, DR க்கு இணை கோடு. அது QR ஐ X இல் வெட்டுகிறது. PX ஐ BR இருசமக் கூறிடுகிறது என நிரூபிக்கவும்.

பயிற்சிகள் செய்ய சில உதவிக் குறிப்புகள்

1. இரண்டு வட்டங்கள் குத்து வட்டங்கள் என நிரூபிக்க

(1) வட்டங்கள் வெட்டும் புள்ளியில் தொடுகோடுகளுக்கிடையே உள்ள கோணம் 90° ஆகுமா என்று பார்க்கவும்.

(2) வெட்டுப் புள்ளி வழிச் செல்லும் ஆரங்கள் குத்துக் கோடுகளா என்று பார்க்கவும்.

(3) $d^2 = r_1^2 + r_2^2$ என்று காட்ட முடியுமா?

(4) ஒரு வட்ட மையத்திலிருந்து அடுத்த வட்டத்துக்கு வரையப்பட்ட தொடுகோட்டின் நீளம் அதன் ஆரத்துக்குச் சமமாக இருக்கிறதா என்று பார்க்கவும்.

(5) ஒரு இசைப்புள்ளி வரிசை இருந்தால் அதில் துணையியப் புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டை விட்டமாகக் கொண்டு ஒரு வட்டம் வரையப்பட்டுள்ளதா? மற்ற வட்டம் அடுத்த இரண்டு புள்ளிகள் வழிச் செல்கிறதா? இவை இரண்டும் உண்மையானால் அவை குத்து வட்டங்கள்.

(6) இரண்டு வெட்டும் வட்டங்களில் ஒரு வட்டத்தின் மையம் வெட்டுப் புள்ளியில் அடுத்த வட்டத்துக்கு வரையப்பட்ட தொடுகோட்டில் உள்ளதா என பார்க்கவும்.

(7) ஒரு ஜதை தன்மாற்றுப் புள்ளிகள் வழிச் செல்கிறதா என்று பார்க்கவும்.

(8) ஒரு ஜதை துணையியப் புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டை விட்டமாகக் கொண்டு வரையப்பட்டதா என்று பார்க்கவும்.

2. தன்மாற்றுப்புள்ளிகள் கண்டுபிடிப்பதெப்படி?

(1) அவற்றைச் சேர்க்கும் கோடு வட்டத்தின் மையத்தின் வழியே செல்ல வேண்டும். மேலும் $OP \cdot OQ = r^2$ இருக்க வேண்டும்.

(2) ஒரு வட்டத்துக்கு வெளியே உள்ள புள்ளியின் தன் மாற்றுப் புள்ளி அதன் தொடுநாண் OP யை வெட்டும் புள்ளி யாகும்.

(3) OP, P யின் போலாரைச் சந்திக்கும் புள்ளி P யின் தன் மாற்றுப் புள்ளியாகும்.

(4) இரு துணையியப் புள்ளிகள் (A, B) கொடுத்திருந்தால், OA, OB, AB யை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தை வெட்டும் புள்ளிகள் A, B யின் தன் மாற்றுப் புள்ளிகள்.

(5) ஒரு விட்டத்தை இசையாகப் பிரிக்கும் புள்ளிகள் தன் மாற்றுப் புள்ளிகள்.

(6) P வட்டத்தின் உள்ளே இருந்தால், அதன் வழியே OP க்குச் செங்குத்து நாண் வரையப்பட்டால், அதன் மூலையில் வட்டத்துக்கு வரையப்பட்ட தொடுகோடு OP யைச் சந்திக் கும் புள்ளி P யின் தன்மாற்றுப் புள்ளியாகும்.

3. துணையியப் புள்ளிகளைக் கண்டுபிடிப்பதெப்படி?

(புள்ளிகள் P, Q. வட்ட மையம் O)

(1) ஒன்றன் போலார் மற்றதன் வழிச் செல்லும்.

(2) Q விலிருந்து OP க்குக் குத்துக்கோடு வரைந்தால் அது P யின் தன் மாற்றுப்புள்ளி வழிச் செல்லும்.

(3) P யின் தன் மாற்றுப் புள்ளி P' என்றால், $\angle OP'Q = 90°$ இருக்கிறதா என்று பார்க்கவும்.

(4) PQ வை விட்டமாகவுடைய வட்டம், வட்டம் (O) வைக் குத்தாக வெட்டுகிறதா?

(5) PQ வட்டத்தை A, B யில் வெட்டினால், $(AB, PQ) = -1$ என்று பார்க்கவும்.

(6) அவை வட்டத்தினுள்ளே வரையப்பட்ட நாற்கோணத்தின் மூலைப்புள்ளிகளா ?

(7) அவை வட்டத்தைச் சுற்றி வரையப்பட்ட நாற்கரத்தின் மூலைவிட்ட முக்கோணத்தின் உச்சிப் புள்ளிகளா ?

4. துணையியக் கோடுகளைக் கண்டுபிடிப்பதெப்படி ?

(கோடுகள் a, b, வட்ட மையம் O)

(1) ஒன்றன் இசைப்புள்ளி (போல்) மற்றதில் இருக்கும்.

(2) O விலிருந்து aக்கு லம்பம் வரைந்தால் அதன் தன்மாற்றுப்புள்ளி b யில் இருக்கும்.

(3) (ab) யிலிருந்து வட்டத்துக்குத் தொடு கோடுகள் வரைந்தால் அவை a, bயுடன் இசைக்கோட்டுக் கற்றையாகும்.

(4) ஒரு தொடுகோடும், தொடுபுள்ளி வழியே செல்லும் எந்தக் கோடும் துணையியக் கோடுகள்.

(5) அவை ஒரு வட்டத்தில் வரையப்பட்ட நாற்கோணத்தின் மூலைப்புள்ளி முக்கோணத்தின் இரண்டு பக்கங்களா என்று பார்க்கவும்.

(6) அவை ஒரு வட்டத்தைச் சுற்றி வரையப்பட்ட நாற்கரத்தின் மூலைவிட்ட முக்கோணத்தின் இரண்டு பக்கங்களா ?

(7) அவை இரண்டு துணையியப் புள்ளிகளின் (காஞ்சுகேட் புள்ளிகளின்) இசைக்கோடுகளா (போலார்கள்)?

5. இசைப்புள்ளி வரிசைகள் எங்கே?

(1) ஒரு வட்ட நாணின் முனைகளும், அதில் இரு துணையியப் புள்ளிகளும் இசைப்புள்ளி வரிசையாகும்.

(2) ஒரு வட்டத்தின் விட்டத்தை தன்மாற்றுப் புள்ளிகள் இசையாகப் பிரிக்கும்.

(3) ஒரு விட்டத்திலோ ஒரு நாணிலோ ஒரு புள்ளியும் அதன் போலாரும் இசைப்புள்ளி வரிசை தரும்.

(4) ஒரு விட்டத்தில் ஒரு புள்ளியும், அதன் தொடுநாண் அதை வெட்டும் புள்ளியும் விட்டத்தை இசையாகப் பிரிக்கும்.

(5) ஒரு நாற்கரத்தில் ஒரு மூலைவிட்டமும், அதை மற்ற மூலைவிட்டங்கள் வெட்டும் புள்ளிகளும் இசைப்புள்ளி வரிசை தரும்.

(6) ஒரு முழு நாற்கோணத்தின் பக்கத்தை இசை முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் வெட்டும் புள்ளிகள் இசையாகப் பிரிக்கும்.

6. இசைக்கோட்டுக் கற்றை எங்கே?

(1) ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு வட்டத்துக்கு வரையப்பட்ட தொடுகோடுகளும் அந்தப் புள்ளி வழிச் செல்லும் துணையியக் கோடுகளும் இசைக் கோட்டுக் கற்றையாகும்.

(2) ஒரு வட்டத்தின் மேல் ஒரு புள்ளியில் தொடுகோடு, அதன் வழி எதாவது ஒரு விட்டத்துக்குக் குத்துகோடு, அதை விட்டத்தின் முனைகளுக்குச் சேர்க்கும் கோடுகள், இவை நான்கும் இசைக் கோட்டுக் கற்றையாகும்.

(3) ஒரு முழு நாற்கோணத்தின் இரு பக்கங்களும், அவை சேரும் புள்ளி வழிச் செல்லும் இரு மூலை விட்டங்களும் இசைக் கோட்டுக் கற்றையாகும்.

(4) இசைப்புள்ளி வரிசையின் புள்ளிகளை ஏதாவது ஒரு புள்ளியுடன் சேர்ந்திருக்கிறதா என்று பார்க்க.

7. ஒரு நேர் கோட்டை மற்றொரு நேர்கோடு இருசமக் கூறிடுகிறதா என்று நீரூபிக்கஅந்தக் கோடு ஒரு ஹார்மோனிக் கற்றையில் ஒரு கோட்டுக்கு இணையா? மற்றக் கோடுகள் அதை அந்த 3 புள்ளிகளில் வெடடுகின்றனவா என்று பாக்கவும்.

8. ஒரு முழு நாற்கோணத்தில்,

(1) 3 மூலைப்புள்ளிகளில் உள்ள 4 கோடுகளும் இசைக் கோட்டுக் கற்றைகள்.

(2) 6 பக்கங்களிலும் உள்ள 4 புள்ளிகளும், இசைப் புள்ளி வரிசைகள்.

9. ஒரு முழு நாற்கரத்தில்

(1) 3 மூலை விட்டங்களிலும் உள்ள 4 புள்ளிகளும் இசைப் புள்ளி வரிசைகள்.

(2) உச்சிப் புள்ளிகளிலும் (Vertices) இசைக் கோட்டுக் கற்றையான 4 கோடுகள் உண்டு.

10. (1) சில புள்ளிகள் ஒரு வரிசையில் உண்டா என்பதற்கு அவற்றின் போலார்கள் ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகளா என்று பார்க்கலாம்.

(2) சில கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகளா என்பதற்கு அவற்றின் போல்கள் ஒரு நேர் கோட்டில் உள்ளனவா என்று பார்க்கவும்.

ஒரு முக்கோணத்தின் சில பண்புகளை நினைவில் வைப்பது நல்லது.

△ ABC யில் AB, AC யை விட்டங்களாகவுடைய வட்டங்கள் BC யில் D யில் சந்திக்கும். AD, பொது நாண்.

(2) △ ABC யில் குத்துக் கோடுகள் வரைந்தால், 6 வட்ட நாற்கரங்கள் உண்டாகும்.

(3) △ DEF, பாத முக்கோணம் (Pedal Triangle) என்றால் அதன் கோணங்களை AD, BE, CF இரு சமக் கூறிடுகின்றன.

$D(EAFC) = -1$ முதலியன.

(4) A, I, I^1 ஒரு கோடமைவன.

(5) I_2, A, I_3 ஒரு கோடமைவன.

$$AII_1 \perp I_2 AI_3.$$

(6) II_1, ஐ விட்டமாகவுடைய வட்டம், B, C வழிச் செல்லும். அதன் மையம் II_1, △ ABC யின் சுற்று வட்டத்தை வெட்டும் புள்ளி.

(7) $A\,II_1$ BC யை X இல் வெட்டினால், $(AI\,X\,I_1) = -1$

(8) △ $I_1\,I_2\,I_3$ க்கு, ABC ஒரு பாத முக்கோணம். (Pedal Triangle).

(9) A', XX_1, BC இவை இரண்டுக்கும் மையப் புள்ளி. (X, X_1 உள், வெளி வட்டங்கள் BC யைத் தொடும் புள்ளிகள்.)

(10) 9 புள்ளி வட்டம், D, A' வழியே செல்லும்.

(11) உள் வட்டம், A க்கு எதிரேயுள்ள வெளி வட்டம் இவற்றின் வடிவொப்பு மையம் X

பயிற்சி 14

பலவகைப் பயிற்சிகள்

1. △ ABC யும் ஒரு வட்டமும் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன. A, B, C இவற்றின் போலார்கள் △ PQR ஐ உண்டாக்குகின்றன. ஆனால் △ ABC யின் பக்கங்கள் P, Q, R இவற்றின் போலார்கள் என நிரூபிக்கவும்.

2. △ ABC யில் O குத்துமையம். AD, BE, CF குத்துக் கோடுகள் BC யை விட்டமாகவுடைய வட்டம், AB யை விட்டமாகவுடைய வட்டத்தைக் குத்தாக வெட்டுகிறது என நிரூபிக்கவும்.

இதை உபயோகித்தோ அல்லாமலோ $A'P$ (A^1, BC யின் மையப்புள்ளி) P, AO வின் மையப்புள்ளி) $\angle EA'F$ ஐயும் EF ஐயும் இருசமக் கூறிடுகிறது என நிரூபிக்கவும்.

3. $\triangle ABC$ யில் O குத்துமையம். O வை மையமாகவும் OA ஐ ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டத்துக்கு B, C யின் தன் மாற்றுப்புள்ளிகள் P, Q ஆகும். OA, $\angle PAQ$ வின் இருசம வெட்டியென நிரூபிக்கவும்.

4. ஒரு வட்டத்தில் AB, P யின் தொடுநாண். அதில் வேறொரு புள்ளி C யில் தொடுகோடு, PA, PB, AB இவற்றை முறையே Q, R, C_1, யில் சந்திக்கிறது. PA, PB, இவற்றிற்கு PC, PC_1 இன் இசைத்துணைக் கோடுகள் என நிரூபிக்கவும்.

5. ஒரு வட்டத்தில் AB, P யின் தொடு நாண். BC, B வழியே விட்டம். PC விட்டத்தை D யில் வெட்டுகிறது. Q, AB யின் மையப் புள்ளி. AD, PQ வின் இரு சம வெட்டி என நிரூபிக்கவும்.

6. $\triangle ABC$ யில், BC யில் சுற்று வட்டத்துக்குத் தொடுகோடுகள் P யில் சந்திக்கின்றன. PA வட்டத்தை D யில் வெட்டுகிறது. BC யின் மையப் புள்ளி O என்றால், $\angle BAO = \angle PAC$ என நிரூபிக்கவும்.

7 ஒரு வட்டத்துக்கு அதற்கு வெளியே உள்ளே ஒரு புள்ளியிருந்து ஒரு அளவு குறிக்காத கோலை (Un grared Ruler) மட்டும் கொண்டு ஒரு தொடுகோடு வரையும் முறையைக் கண்டுபிடிக்கவும். (செ. ப.)

8. ஒரு வட்டத்துக்கு அதன் மேலுள்ள P என்னும் புள்ளியில் தொடுகோடு இரண்டு துணையியப் புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்கோட்டின் நடுப்புள்ளி வழியே சென்றால், (இப் புள்ளிகளில் ஒன்றும் தொடு கோட்டின் மேல் இல்லை) அவை P யில் ஒரு செங்கோணத்தைத் தாங்குகின்றன (Subtend) என நிரூபிக்கவும். (செ. ப)

9. வட்டம் (O) க்கு AB, AC துணையியக் கோடுகள். A யின் போலார் AB, AC யை B, C யில் வெட்டுகிறது. $\triangle ABC$, வட்டம் (O) க்குத் தன்னிசை முக்கோணம் என்றும், O $\triangle ABC$ யின் குத்து மையம் என்றும் நிரூபிக்கவும். (செ. ப)

10. ஒரு முழு நாற்கரத்தின் இரண்டு ஜதை எதிர் உச்சிப் புள்ளிகள் ஒரு வட்டத்துக்குத் துணையியப் புள்ளிகள் என்றால், மூன்றாவது ஜதை எதிர் உச்சிப் புள்ளிகளும் அந்த வட்டத்துக்குத் துணையியப் புள்ளிகள் என நிரூபிக்கவும். (செ ப)

11. இரண்டு வட்டங்கள் C_1, C_2; P, Q என்னும் புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன. C என்னும் வட்டம் C_1, C_2 இரண்டையும் குத்தாக வெட்டுகிறது. C க்கு P, Q தன்மாற்றுப் புள்ளிகள் என நிரூபிக்கவும். (செ ப)

12. ஒரு முழு நாற்கரத்தின் மூலைவிட்ட முக்கோணத்தின் சுற்று வட்டம் அந்த முக்கோணத்தின் பக்கங்களை, விட்டங்களாகக் கொண்டு வரையப்பட்ட வட்டங்களைக் குத்தாக வெட்டுகிறது என நிரூபிக்கவும். (செ. ப)

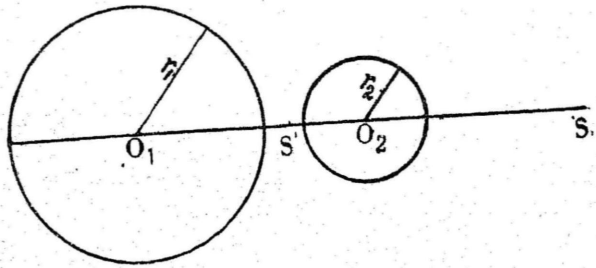
III. வடிவொப்பு மையங்கள்

(Centres of Similitude)

வரையறை

1. வடிவொப்பு மையங்கள் (Centres of Similitude)

இரண்டு வட்டங்களின் மையங்களைச் சேர்க்கும் கோட்டை உட்புறமாகவும் வெளிப்புறமாகவும் ஆரங்களின் விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளிகள் வடிவொப்பு மையங்கள் எனப்படும்.



III படம் 1

வட்டம் (O_1), வட்டம் (O_2)வின் ஆரங்கள் முறையே r_1, r_2.

S', O_1O_2 வை உட்புறமாக $r_1 : r_2$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கிறது.

S, O_1O_2 வை வெளிப்புறமாக $r_1 : r_2$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கிறது.

S' S இரு வட்டங்களுக்கும் வடிவொப்பு மையங்களாகும்.

S' உள் வடிவொப்பு மையம் (Internal centre of Similitude) எனப்படும். S வெளி வடிவொப்பு மையம் (external centre of similitude) எனப்படும்.

குறிப்பு

1. இரு வட்டங்களுக்கு வரையப்பட்ட நேர்பொதுத்தொடு கோடு (direct common tangent) S வழிச் செல்லும்.

III படம் 2 பார்க்கவும்.

$O_1 T_1$, $O_2 T_2$ வைச் சேர்க்கவும்.

$T_1 T_2$ பொதுத் தொடுகோடு.

$\therefore$ $O_1 T_1$, $O_2 T_2$ இவை $T_1 T_2$ க்குச் செங்குத்துக் கோடுகள்.

$\therefore$ $O_1 T_1 \parallel O_2 T_2$.

$T_1 T_2$, $O_1 O_2$ இவை S இல் சந்தித்தால்,

$\triangle O_1 T_1 S$, $\triangle O_2 T_2 S$ வடிவொத்த முக்கோணங்கள்.

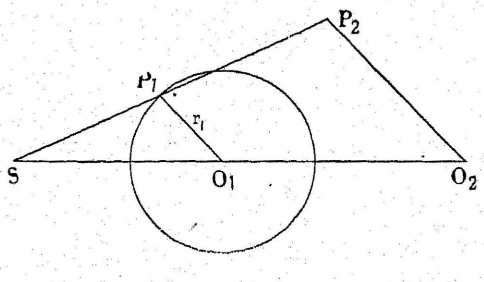
$$\therefore \quad \frac{O_1 S}{O_2 S} = \frac{O_1 T_1}{O_2 T_2} = \frac{r_1}{r_2}.$$

$\therefore$ S, வடிவொப்பு மையமாகும்.

படம் 3 இல் இதேபோல, குறுக்குத் தொடுகோடு $O_1 O_2$ வை S' இல் சந்திக்கும் என நிருபிக்கலாம்.

(2) இதிலிருந்து, S, S' வழி ஒரு வட்டத்திற்கு வரையப் படும் தொடுகோடு மற்றொரு வட்டத்தையும் தொடும் என்று தெரிகிறது.

(3) ஒரு நிலையான புள்ளி S உம், O_1 மையமாகவும் r_1 ஆரமாகவும் உள்ள ஒரு வட்டமும் கொடுக்கப்பட்டால், S ஐ அந்த வட்டத்தின் மேல் உள்ள எந்த புள்ளியையும் சேர்க்கும் கோட்டை ஒரு குறிப்பிட்ட விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி—மற்றொரு வட்டத்தில் அமையும். அந்த வட்டத்தின் மையம் O_2 என்றால், O_2, SO_1 ஐ அதே விகிதத்தில் பிரிக்கும்.



III படம் 2

S என்னும் புள்ளியும், O_1 மையமாகவும் r_1 ஆரமாகவும் உள்ள வட்டமும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

P_1 வட்டம் (O_1) இல் ஏதாவது ஒரு புள்ளி.

P_2, SP_1 ஐக் குறிப்பிட்ட விகிதத்தில் பிரிக்கிறது.

(அ-து) $\frac{SP_2}{SP_1} = k$ (மாருதது).

P_2 வின் நியமபாதையைக் கண்டுபிடிக்க.

SO_1 இல் $\frac{SO_2}{SO_1} = k$ இருக்கும்படி O_2 என்னும் புள்ளி குறிக்க.

($O_2 P_2$ வைச் சேர்க்க.)

$$\therefore \frac{SO_2}{SO_1} = \frac{SP_2}{SP_1}.$$

$$\therefore \frac{SP_1}{SO_1} = \frac{SP_2}{SO_2}.$$

$\triangle SO_1 P_1$, $\triangle SO_2 P_2$ வில்

$\angle S$ பொது.

$$\frac{SP_1}{SO_1} = \frac{SP_2}{SO_2}.$$

$$\therefore \triangle SO_1 P_1 \ ||| \ \triangle SO_2 P_2.$$

$$\therefore \frac{SO_2}{SO_1} = \frac{SP_2}{SP_1} = \frac{O_2P_2}{O_1P_1}.$$

ஆனல் $\frac{SP_2}{SP_1} = k$ (மாருதது)

$\therefore \frac{SO_2}{SO_1} = k.$ $\therefore$ O_2 நிலையான புள்ளி.

இன்னும் $\frac{O_2P_2}{O_1P_1} = \frac{r_2}{r_1} = k.$

$\therefore$ r_2 நிலையானது.

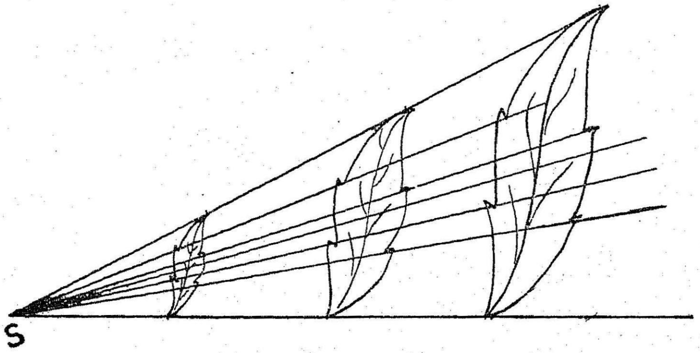
$\therefore$ P_2, O_2 வை மையமாகவும் r_2 வை ஆரமாகவும் உள்ள வட்டத்தில் இருக்கிறது.

குறிப்பு :

(1) $\frac{SO_1}{SO_2} = \frac{r_1}{r_2}$ ஆகையால் இந்த இரு வட்டங்களுக்கும் S வடிவொப்பு மையம்.

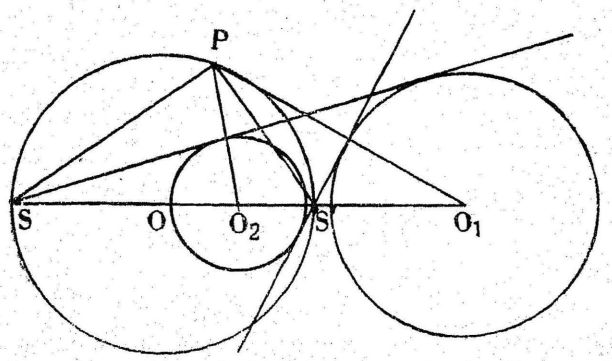
(2) P_1 கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்திலல்லாமல் வேறு எந்த உருவப் படத்திலும் இருந்தாலும், P_2 அதற்கு வடிவொத்த, அதே மாதிரி வைக்கப்பட்ட (similar and similarly situated) மற்றொரு உருவப் படத்தில் அமையும் என்பதறியவும்.

(3) S என்னும் புள்ளியிலிருந்து கோடுகள் வரைந்து ஒரு உருவப் படத்துக்கு ஒத்த வடிவமுள்ள பல உருவப் படங்கள் வரைய முடியும். ஆகையால் தான் S ஐ வடிவொப்பு மையம் என்கிறோம் (படம் 5 பார்க்கவும்).



III படம் 3

4. SS' ஐ விட்டமாகவுடைய வட்டம், வட்ட மையங்களிலிருந்து அதன் தூரங்களின் விகிதம் வட்ட ஆரங்களின் விகிதத்துக்குச் சமமாகும்படி நகரும் புள்ளியின் நியமப் பாதையாகும்.



III படம் 4

SS' ஐ விட்டமாகவுடைய வட்டத்தின் மேல் P ஏதாவது ஒரு புள்ளியாகட்டும். வட்டங்களின் ஆரங்கள் முறையே r_1, r_2 ஆகட்டும்.

PO_1, PS', PO_2, PS ஐச் சேர்க்கவும்.

நிருபணம் :

$$\frac{O_1S'}{S'O_2} = \frac{O_1S}{O_2S} = \frac{r_1}{r_2}.$$ (S, S' வடிவொப்புமை மையங்கள் வரையறைப்படி)

$\therefore \quad (O_1S'\ O_2S) = -1.$

$\therefore \quad P\,(O_1S'\ O_2S) = -1.$

மேலும் P, SS' ஐ விட்டமாகவுடைய வட்டத்திலிருப்பதால்

$\angle S'PS = 90°$

$\therefore \quad S'P$, SP இவை $\angle O_1PO_2$ வின் இருசம வெட்டிகள். (தேற்றம் 6)

$$\therefore \quad \frac{PO_1}{PO_2} = \frac{O_1S'}{S'O_2} = \frac{r_1}{r_2}.$$

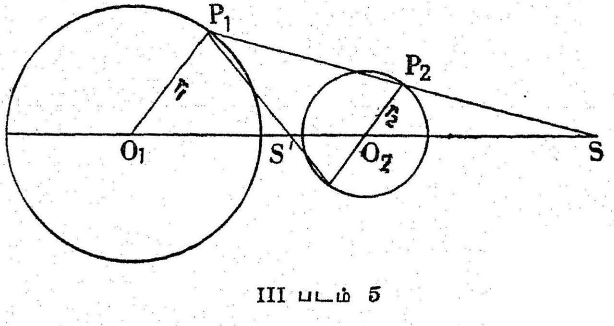
$\therefore \quad P$யின் நியமப் பாதை SS' ஐ விட்டமாகவுடைய வட்டம்.

வரையறை

SS' ஐ விட்டமாகவுடைய வட்டம் வடிவொப்பு வட்டம் (circle of similitude) எனப்படும்.

தேற்றம் 29

இரண்டு வட்டங்களில் இணையாக உள்ள ஆரங்களின் மூலைகளைச் சேர்க்கும் கோடு வட்ட மையங்களைச் சேர்க்கும் கோட்டில் இரண்டு குறிப்பிட்ட புள்ளிகளில் ஒன்றின் வழியே செல்லும்.



III படம் 5

கொள்கை: (1) $\odot(O_1)$, $\odot(O_2)$ இரு வட்டங்கள்.

(2) அவற்றின் ஆரங்கள் r_1, r_2

(3) $O_1 P_1$, $O_2 P_2$ இணை ஆரங்கள்.

(4) $P_1 P_2$, $P_1 Q_2$, $O_1 O_2$ வை S_1 S' இல் வெட்டட்டும்.

நிருபிக்க: $S_1 S^1$ நிலையான புள்ளிகள் என.

நிருபணம்: $O_1 P_1$, $O_2 P_2$ இணைக் கோடுகள்.

$\therefore$ $\triangle O_1 P_1 S$, $\triangle O_2 P_2 S$ வடிவொத்தவை.

$$\therefore \quad \frac{O_1 S}{O_2 S} = \frac{O_1 P_1}{O_2 P_2} = \frac{r_1}{r_2}.$$

$\therefore$ S, $O_1 O_2$ வை $\frac{r_1}{r_2}$ என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கிறது.

$\therefore$ S ஒரு நிலையான புள்ளி.

அது வெளி வடிவொப்பு மையமாகும்.

அது போலவே, $O_2 Q_2$, $O_1 P_1$ க்கு எதிர்த்திசையில் இணை; $P_1 Q_2$, $O_1 O_2$ வை S' இல் வெட்டுகிறது.

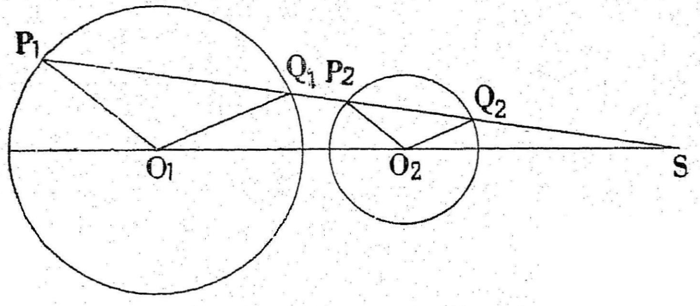
$\triangle O_1 P_1 S' \parallel \triangle O_2 Q_2 S'$.

$$\therefore \quad \frac{O_1 S'}{O_2 S'} = \frac{O_1 P_1}{O_2 Q_2} = \frac{r_1}{r_2}.$$

$\therefore$ S' உம் நிலையான புள்ளி. அது $O_1 O_2$ வை r_2 என்னும் விகிதத்தில் பிரிப்பதால் அது உள் வடி வொப்பு மையமாகும்.

தேற்றம் 30

ஒரு வடிவொப்பு மையத்திலிருந்து இரண்டு வட்டங்களை வெட்டும்படி ஒரு நேர்கோடு வரைந்தால் அந்த புள்ளிகள் வழிச்செல்லும் ஆரங்கள், இரு ஜதை இணை ஆரங்களாகும்.



III படம் 6

கொள்கை: (1) $\odot(O_1)$, $\odot(O_2)$ க்கு S ஒரு வடிவொப்பு மையம் ஆகட்டும்.

(2) S வழியே வரையப்பட்ட கோடு $\odot(O_1)$ ஐ $P_1 Q_1$ இலும், $\odot(O_2)$ ஐ $P_2 Q_2$ இலும் வெட்டுகிறது.

நிரூபிக்க: $O_1 P_1$, $O_2 P_2$; $O_1 Q_1$, $O_2 Q_2$; இவை இரு ஜதை இணைகோடுகள் என.

நிரூபணம்: $\triangle SO_1 Q_1$, $\triangle SO_2 Q_2$ வில்,

$$\frac{SO_1}{SO_2} = \frac{r_1}{r_2} \text{ (}S\text{ வடிவொப்பு மையம்)}$$

$$\frac{S\,O_1}{S\,O_2} = \frac{O_1\,Q_1}{O_2\,Q_2}.$$

மேலும் $\angle S$ பொது.

$\therefore$ 3 வது கோணங்கள் $O_1 Q_1 S$, $O_2 Q_2 S$ இவை சமம் அல்லது மிகை நிரப்பிகள்.

(1) அவை சமம் என்றால் $O_1 Q_1 \parallel O_2 Q_2$.

$$\text{மேலும் } \angle O_1 P_1 S = \angle O_1 Q_1 P_1 \;(\because O_1 P_1 = O_1 Q_1)$$
$$= 180° - \angle O_1 Q_1 S$$
$$= 180° - \angle O_2 Q_2 S \text{ (நிரூபித்தபடி)}$$
$$= \angle O_2 Q_2 P_2$$
$$= \angle O_2 P_2 S.$$
$$\therefore O_1 P_1 \parallel O_2 P_2.$$

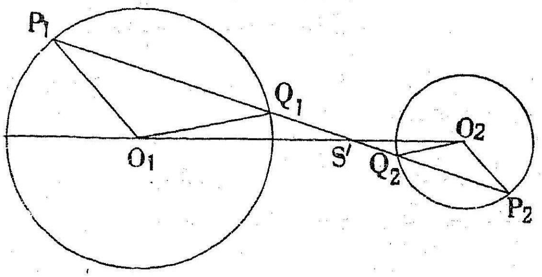
(2) $\angle O_1 Q_1 S$, $\angle O_2 Q_2 S$ இவை மிகை நிரப்பிகளானால், (P_2வும், Q_2வும் படத்தில் இடம் மாறிவரும்.)

$$\angle O_1 Q_1 S = 180° - \angle O_2 Q_2 S$$
$$= 180° - \angle O_2 P_2 Q_2$$
$$= \angle O_2 P_2 S.$$
$$\therefore O_1 Q_1 \parallel O_2 P_2.$$
$$\text{மேலும் } \angle O_1 P_1 S = \angle O_1 Q_1 P_1$$
$$= 180° - \angle O_1 Q_1 S$$
$$= \angle O_2 Q_2 S.$$
$$\therefore O_1 P_1 \parallel O_2 Q_2.$$

முன் போலவே S^1 வழிச் செல்லும் கோடு வட்டங்களை P_1, Q_1; P_2, Q_2 வில் வெட்டினால், $O_1 P_1$, $O_1 Q_1$; $O_2 P_2$, $O_2 Q_2$ இவை இரு ஜதை இணை ஆரங்கள் என நிரூபிக்கலாம்.

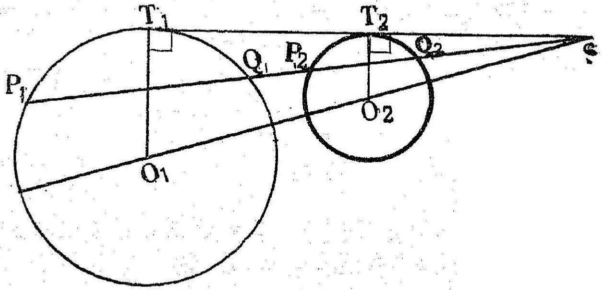
வரையறை

இரு வட்டங்களின் இணை ஆரங்களின் முனைகள் ஒத்த புள்ளிகள் (Corresponding Points) எனப்படும்.

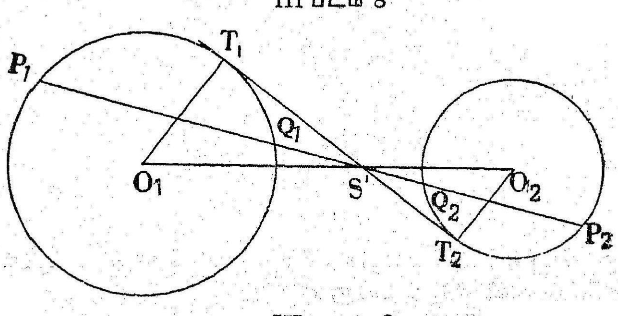


III படம் 7

ஒரு வடிவொப்பு மையத்திலிருந்து வரையப்படும் நேர் கோடு வட்டங்களை வெட்டும் புள்ளிகளில் இணையல்லாத ஆரங்களின் முனைகள் வேற்றுப் புள்ளிகள் (Non-Corresponding Points) எனப்படும்.



III படம் 8

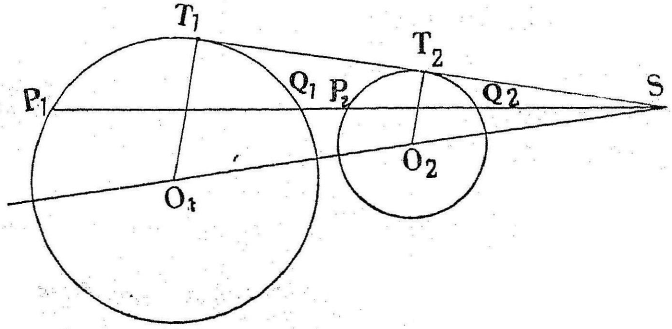


III படம் 9

ஒரு வடிவொப்பு மையத்திலிருந்து வட்டங்கள் P_1, Q_1; P_2 Q_2 வில் வெட்டும்படி ஒரு கோடு வரைந்தால் P_1, P_2; Q_1, Q_2 ஒத்த புள்ளிகள் (Corresponding Points) S, S^4 இலிருந்து P_1, P_2 தூரத்திலும், Q_1, Q_2 S, S^1 க்கு அருகிலும் இருப்பதைக் கவனிக்கவும். P_1, Q_2; P_2 Q_1 இவை வேற்றுப் புள்ளிகள் (Non Corresponding Points).

தேற்றம் 31

இரண்டு வட்டங்களின் ஒரு வடிவொப்பு மையத்திலிருந்து வட்டங்களை வெட்டும்படி ஒரு நேர்கோடு வரைந்தால், அந்த வடிவொப்பு மையத்திலிருந்து ஒரு ஜதை வேற்றுப் புள்ளிகளின் தூரங்களாலடைபடும் செவ்வகத்தின் பரப்பு மாறாது.



III படம் 10

கொள்கை : (1) வட்டம் (O_1), வட்டம் (O_2) இவற்றின் வடிவொப்பு மையம் S.

(2) S வழியே ஒரு கோடு வட்டங்களை P_1, Q_1; P_2, Q_2 வில் வெட்டுகின்றது.

(3) P_1, Q_2; P_2, Q_1 வேற்றுப் புள்ளிகள்.

நிரூபிக்க : $SP_2\ SQ_1$ ஒரு மாறிலி என்று.

நிரூபணம் : S வழியே $ST_1\ T_2$ என்னும் பொதுத் தொடு கோடு வரைக.

$ST_1 = t_1$, $ST_2 = t_2$ என்போம்.

O_1P_1, O_1Q_1, O_2P_2, O_2Q_2, O_1T_1, O_2T_2 இவற்றைச் சேர்க்கவும்.

$O_1Q_1 \parallel O_2Q_2$.

$\therefore \quad \frac{SQ_1}{SQ_2} = \frac{O_1 Q_1}{O_2 Q_2} = \frac{r_1}{r_2}.$

ஆனால் $SQ_2 . SP_2 = t_2^2$.

$\therefore$ இரண்டையும் பெருக்க,

$SQ_1 . SP_2 = \frac{r_1}{r_2} . t_2^2.$

O_1T_1, O_2T_2 இவை $ST_1 T_2$ க்குக் குத்துக்கோடுகள்.

$\therefore \quad O_1T_1 \parallel O_2 T_2.$

$\therefore \quad \frac{ST_1}{ST_2} = \frac{O_1T_1}{O_2T_2} = \frac{r_1}{r_2}.$

$\therefore \quad \frac{r_1}{r_2} = \frac{t_1}{t_2}$

$$\therefore \quad SQ_1 . SP_2 = \frac{t_1}{t_2} . t_2^2.$$
$$= t_1 t_2.$$

இது மாறுது. (நி. வே.)

குறிப்பு : (1) $ST_1 . ST_2 = SQ_1 SP_2$

$\therefore \quad T_1 T_2 Q_1 P_2$ வட்ட நாற்கரம்

(2) S ஐ மையமாகவும், $\sqrt{t_1 t_2}$ வை ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டத்துக்கு,

$P_2, Q_1; P_1, Q_2; T_1, T_2$ தன் மாற்றுப் புள்ளிகளாகும்.

$SQ_2 . SP_1 = ST_1 . ST_2.$

$Q_1 P_1 T_1 T_2$ வட்ட நாற்கரம்

(3) ஒரே நேர்கோட்டில் அல்லாத இரண்டு ஜதை வேற்றுப் புள்ளிகள் வட்ட நாற்கரத்திலுள்ளன.

தேற்றம் 32

ஒரு வட்டம் இரண்டு வட்டங்களைத் தொட்டால், தொடு புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோடு வட்டங்களின் ஒரு வடிவொப்பு மையத்தின் வழிச் செல்லும்.

கொள்கை : (1) $\odot (O_1)$, $\odot (O_2)$, $\odot (O_3)$, $P_1 Q_2$ வில் தொடுகிறது.

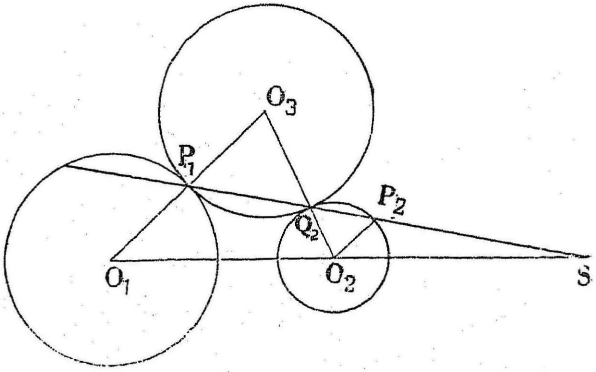
(2) S ஒரு வடிவொப்பு மையம்.

நிருபிக்க : $P_1 Q_2$, S வழிச் செல்லும் என.

நிருபணம் : $P_1 Q_2$, வட்டம் (O_2) வை P_2 இல் வெட்டட்டும்.

$O_2 P_2$ வைச் சேர்.

வட்டம் (O_3), வட்டம் (O_1) ஐத் தொடுவதால், $O_1 O_3$, P_1 வழிச் செல்லும்.



III படம் 11

அதே மாதிரி, $O_3\, Q_2\, O_2$ ஒரே நேர்கோடு.

வட்டம் (O_3) இல் $O_3\, P_1$, $O_3\, Q_2$ ஆரங்கள்.

$\therefore\quad \angle\, O_3 P_1 Q_2 = \angle\, O_3\, Q_2\, P_1.$

$=$ குத்தெதிர்க் கோணம் $O_2\, Q_2\, P_2$

$= \angle\, O_2P_2Q_2\ (O_2P_2 = O_2Q_2 = r_2).$

$\therefore\quad O_3\, P_1$, $O_2\, P_2$ இவற்றை $P_1\, P_2$ வெட்டுவதால் உண்டாகும் மாற்றுக் கோணங்கள் சமம்.

$\therefore\quad O_3P_1 \parallel O_2P_2$

$\therefore\quad O_1P_1 \parallel O_2P_2.$

$\therefore\quad P_1\, P_2$, S வழியே செல்லும். (தேற்றம் 29)

கிளைத் தேற்றம்

$SP_1 . SQ_2 = t_1 t_2$

ஆனல் $SQ_2\, P_1$ வட்டம் (O_3) க்கு வரையப்பட்ட ஒரு கோடு.

$\therefore\quad SQ_2 . SP_1 = t_3^2$ (S இலிருந்து வட்டம் (O_3)க்கு வரையப்பட்ட தொடுகோட்டின் நீளம் t_3).

இரண்டு வட்டங்களுக்கும் வேற்றுப் புள்ளிகள் எவையாயிருந்தாலும் $SQ_2 . SP_1 = t_1 t_2$. மாருது.

$\therefore$ வட்டம் O_3 க்கு S இலிருந்து வரையப்பட்ட தொடுகோட்டின் நீளமும் மாருது.

$t_3^2 = t_1\, t_2.$

∴ இரண்டு வட்டங்களைத் தொடும் வட்டத்துக்கு அவற்றின் ஒரு வடிவொப்பு மையத்திலிருந்து வரையப்பட்ட தொடுகோட்டின் நீளம் ஒரு மாறிலி (constant)

குறிப்பு

1. ஒரு வட்டம் இரண்டு வட்டங்களையும் வெளியிலோ அல்லது உள்ளேயோ தொடலாம். அப்பொழுது தொடுபுள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோடு வெளி வடிவொப்பு மையத்தின் வழிச் செல்லும்.

(2) ஒரு வட்டம் கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு வட்டங்களை ஒன்றை வெளியிலும் ஒன்றை உட்புறமாகவும் தொட்டால், தொடுபுள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோடு உள் வடிவொப்பு மையத்தின் வழிச் செல்லும்.

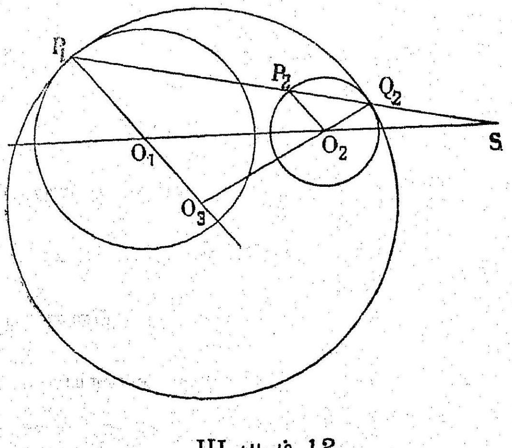
(3) இரண்டு வட்டங்களையும் தொடும் வட்டங்களில் இம்மாதிரி 4 வகை உண்டு.

1. இரண்டையும் வெளியே.

2. இரண்டையும் உள்ளே.

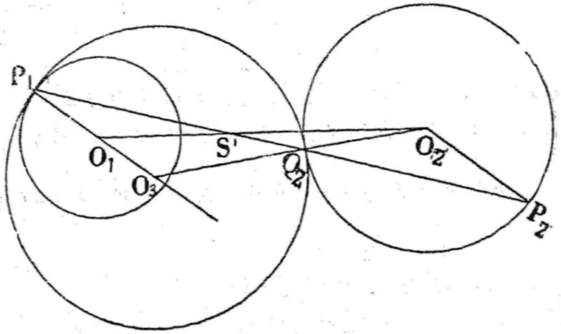
3. முதல் வட்டத்தை வெளியேயும் இரண்டாவதை உள்ளேயும்.

4. முதல் வட்டத்தை உள்ளேயும் இரண்டாவதை வெளியேயும்.



III படம் 12

இவற்றில் இரண்டாவது, நான்காவது வகைகளைக் கீழே காட்டியிருக்கிறோம். மாணவர்கள் இது மாதிரி இன்னும் பல தொடு வட்டங்கள் வரைந்து பார்ப்பது நல்லது.



III படம் 13

ஒரு கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்தையும், மற்றொரு கொடுக்கப் பட்ட வட்டத்தை ஒரு கொடுக்கப்பட்ட புள்ளியிலும் தொடும் வட்டங்கள் வரைய

III படம் 13, 14 பார்க்கவும்.

வட்டம் (O_1), வட்டம் (O_2), வட்டம் (O_1) இல் P_1 என்னும் புள்ளி கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.

S, S' வடிவொப்பு மையங்கள்.

$P_1 S$ $(P_1 S')$ ஐச் சேர்.

அது வட்டம் (O_2) வை வேற்றுப்புள்ளி Q_2 வில் வெட்டட்டும்.

O_2Q_2, O_1P_1 இவற்றைச் சேர்த்து நீட்டிவிடு. அவை O_3 இல் வெட்டட்டும்.

O_3 மையமாகவும், O_3P_1 ஐ ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டம் வட்டம் (O_2) வையும் தொடும்.

நிரூபணம்: P_1, Q_2 வேற்றுப் புள்ளிகளாதலால் O_1P_1, O_2Q_2 இணையல்ல.

P_1Q_2, வட்டம் (O_2)ஐ P_2 வில் மறுபடியும் வெட்டட்டும்.

O_2P_2 ஐச் சேர்.

$\therefore \quad O_1 P_1 \parallel O_2 P_2$

படம் 13 இல் $\therefore \angle O_1P_1S_1 = \angle O_2P_2 S.$

$= \angle O_2Q_2P_2 \quad (O_2P_2 = O_2Q_2)$

$$\therefore \quad O_3 P_1 = O_3 Q_2.$$

படம் 13 இல் $\angle O_1P_1S' = \angle O_2P_2S'$

$= \angle O_2Q_2P_2 \; (O_2 P_2 = O_2 Q_2)$

$= \angle O_3 Q_2 S'$ (குத்தெதிர்க்
(கோணம்

$$\therefore \quad O_3P = O_3 Q_2$$

வரைதல்படி, $O_3O_1P_1$, $O_3 O_2 Q_2$ நேர்கோடுகள்.

$\therefore$ வட்டம் (O_3) இரண்டு வட்டங்களையும் தொடுகிறது.

4. (a) இரண்டு வட்டங்களின் ஆரங்கள் சமமானால்

$$\frac{O_1S}{O_2S} = \frac{O_1S'}{S'O_2} = \frac{r_1}{r_2} = 1.$$

$\therefore$ S', O_1O_2 இன் மையப்புள்ளி.

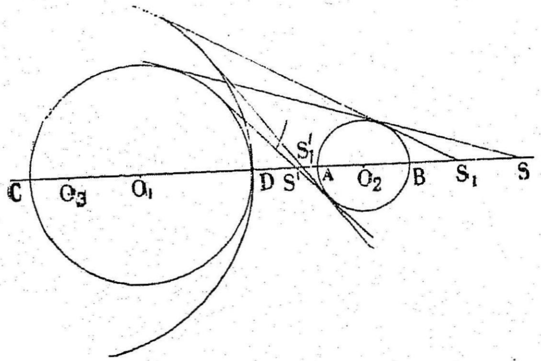
S, O_1O_2 இல் எட்டாப்புள்ளி.

(b) $r_1 > r_2$ ஆக இருக்கட்டும்.

$$\frac{O_1S}{O_2S} = \frac{O_1S'}{S'O_2} = \frac{r_1}{r_2} > 1.$$

$\therefore$ S, S', O_2 வின் அருகே இருக்கும்.

5. ஒரு வட்டம், ஒரு கோடு இவற்றின் வடிவொப்பு மையங்கள்



III படம் 14

வட்டங்களின் பொதுத்தொடுகோடுகள் $O_1 O_2$ஐ S, S' இல் வெட்டும்.

அவை வடிவொப்பு மையங்களாகும்.

O_1O_2 வட்டங்களை C, D, A, B யில் வெட்டட்டும்.

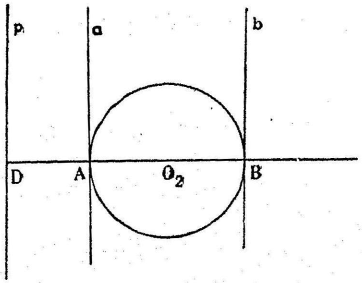
D என்னும் புள்ளியை மாருமல் வைத்துக் கொண்டு r_1 ஐ அதிகமாக்கினுல், (O_3 மையமாகட்டும்).

S_1, S_1', O_2 க்கு இன்னும் அருகே இருக்கின்றன.

(அ-து) r_1 அதிகமாக ஆக, S', S, O_2 ஐ நெருங்குகின்றன.

r_1 மிக அதிகமாகி, முடிவிலியாளுல் (infinity) வட்டம் ஒரு நேர்கோடாகும். அது O_1O_2 க்கு D யில் வரையப்பட்ட குத்துக் கோடாகும்.

அப்போது S', A யுடனும், S, B யுடனும் பொருந்தும்.



III படம் 15

முடிவில் படம் 15 இல் காட்டியிருப்பது போலாராகும். ஒரு நேர்கோடு. AB, P க்குச் செங்குத்தான விட்டம்: a, b பொதுத் தொடுகோடுகளின் முடிவு நிலே. (limiting position).

∴ ஒரு வட்டத்துக்கும் ஒரு நேர்கோட்டுக்கும் வடிவொப்பு மையங்கள் அந்த வட்டத்தில் நேர்கோட்டுக்குக் குத்தாக வரையப்பட்ட விட்டத்தின் முனைகளாகும்.

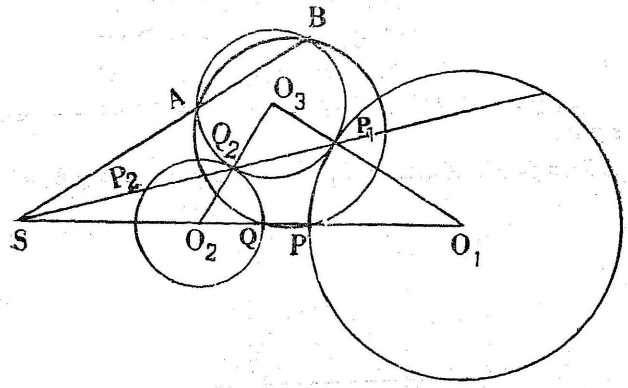
வட்டம் (O_2) க்கும் P க்கும் வடிவொப்பு மையங்கள் A, B எனக் கொள்ளலாம்.

மாதிரிகள்

1. இரண்டு கொடுக்கப்பட்ட வட்டங்களைத் தொடும்படியும் ஒரு கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி வழியே செல்லும்படியும் ஒரு வட்டம் வரைய

கொள்கை: (1) வட்டம் (O_1), வட்டம் (O_2), A கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.

வரைய : A வழியே, ⊙ (O_1), ⊙ (O_2) இரண்டையும் தொடும் வட்டம் வரைய.



III படம் 16

வரைமுறை : S கண்டுபிடிக்கவும்.

O_1O_2, வட்டங்களை வேற்றுப் புள்ளிகள் P, Q வில் வெட்டட்டும்.

வட்டம் PQA யை வரைந்து SA ஐச் சேர்த்து நீட்டி விடவும்.

அது வட்டம் PQA யை B யில் வெட்டட்டும்.

A, B வழியே வட்டம் (O_2) வைத் தொடும்படி ஒரு வட்டம் வரையவும்.

அது ⊙ O_2 வை Q_2 வில் தொடட்டும்.

அது வட்டம் (O_1) ஐயும் தொடும்.

நிரூபணம் : P, Q, A, B ஒரு வட்டப் புள்ளிகள்.

PQ, AB, S இல் வெட்டுகின்றன.

$\therefore \; SP.\ OQ = SA.\ SB$

SQ_2 வட்டம் (O_2) ஐ P_1 இலும், வட்டம் (O_2) வை P_2 இலும் வெட்டட்டும்.

$\therefore \; SP.\ SQ = SP_1.\ SQ_2$ (வேற்றுப் புள்ளிகள்)

$\therefore \; SP_1.\ SQ_2 = SA.\ SB$

$\therefore$ P_1, வட்டம் $AB\,Q_2$ இல் உள்ளது.

P_1, P_2 ஒத்த புள்ளிகள்.

$\therefore \; O_1P_1 \parallel O_2P_2$.

$\therefore \quad \angle O_1P_1S = O_2P_2S.$

$= 180^\circ - \angle O_2P_2Q_2$

$= 180^\circ - \angle O_2Q_2P_2 \qquad (O_2P_2 = O_2Q_2)$

$= 180^\circ - \angle O_3Q_2P_1$ (குத்தெதிர்க் கோணங்கள்)

$= 180^\circ - \angle O_3P_1Q_2 \qquad (O_3P_1 = O_3Q_2)$

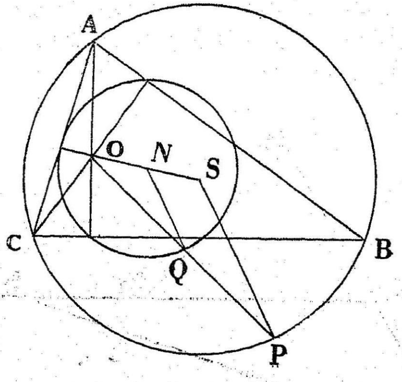
$\therefore \quad O_1P_1,\ O_3P_1$ ஒரு நேர்கோடு.

$\therefore$ வட்டம் (O_3) P_1 வழிச் செல்கிறது. (நிரூபிக்கப் பட்டது)

மேலும் $O_3P_1O_1$ ஒரு நேர்கோடு.

$\therefore$ வட்டம் (O_3), வட்டம் (O_1) ஐத் தொடுகிறது.

2. ஒரு முக்கோணத்தில் குத்துச் சந்தியிலிருந்து சுற்று வட்டத்துக்கு எந்தக் கோடு வரைந்தாலும் அதை ஒன்பது புள்ளி வட்டம் இரு சமக் கூறிடும் என்று நிரூபிக்க.



III படம் 17

கொள்கை : (1) $\triangle ABC$ யில் O குத்துச் சந்தி.

(2) N ஒன்பது புள்ளி வட்ட மையம்.

(3) S சுற்று வட்ட மையம்.

(4) O விலிருந்து சுற்று வட்டத்துக்கு OP வரையப்பட்டிருக்கிறது.

(5) OP யை ஒன்பது புள்ளி வட்டம் Q வில் வெட்டுகிறது.

நிரூபிக்க : $OQ = QP$ என.

நிருபணம் : N ஒன்பது புள்ளி விட்ட மையம்.

$\therefore$ N, SO வின் நடுப்புள்ளி.

$$\therefore \quad \frac{OS}{ON} = \frac{2}{1}.$$

மேலும் ஒன்பது புள்ளி விட்டத்தின் ஆரம் $\frac{1}{2} R$.

$$\therefore \quad \frac{OS}{ON} = \frac{\text{சுற்று வட்டத்தின் ஆரம்}}{\text{9 புள்ளி வட்ட ஆரம்}}$$

$\therefore$ சுற்று வட்டம், 9 புள்ளி வட்டம்

இவற்றுக்கு O, வெளிப்புற வடிவொப்பு மையம்.

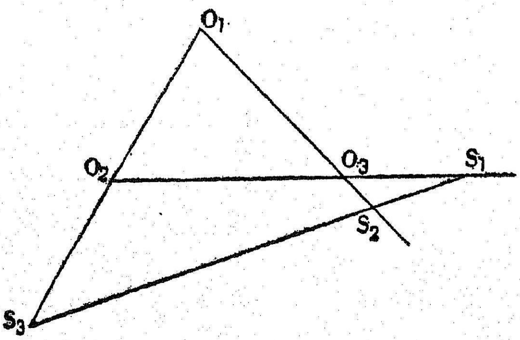
$\therefore$ OQP, இந்த வட்டங்களை Q, P இல் வெட்டுவதால் $NQ \parallel SP$ (தேற்றம் 30).

$$\therefore \quad \frac{OP}{OQ} = \frac{OS}{ON} = \frac{2}{1}.$$

$$\therefore \quad OP = 2\,OQ.$$

$$\therefore \quad OQ = QP.$$

(3) மூன்று வட்டங்களை இரண்டிரண்டாக எடுத்தால் அவற்றின் வெளிப்புற வடிவொப்பு மையங்கள் ஒரு கோடமைவன என நிருபிக்கவும்.



III படம் 18

கொள்கை : (1) O_1, O_2, O_3 வட்ட மையங்களாகட்டும்.

(2) r_1, r_2, r_3 வட்ட ஆரங்களாகட்டும்.

(3) S_1, S_2, S_3 வெளி வடிவொப்பு மையங்களாகட்டும்.

நிருபிக்க : S_1, S_2, S_3 ஒரு கோடமைவன என்று.

நிருபணம் : S_1, வெளி வடிவொப்பு மையம்.

$$\therefore \quad \frac{O_2S_1}{O_3S_1} = \frac{r_2}{r_3}.$$

$$\therefore \quad \frac{O_2S_1}{S_1O_3} = -\frac{r_2}{r_3}.$$

அதுபோலவே, $$\frac{O_3S_2}{S_2O_1} = -\frac{r_3}{r_1}.$$

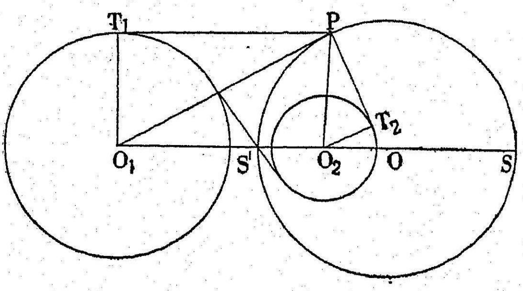
$$\frac{O_1S_3}{S_3O_2} = -\frac{r_1}{r_2}.$$

$$\therefore \quad \frac{O_2S_1}{S_1O_3}\cdot\frac{O_3S_2}{S_2O_1}\cdot\frac{O_1S_3}{S_3O_2} = \left(-\frac{r_2}{r_3}.\ \right)\left(-\frac{r_3}{r_1}\right)-\frac{r_1}{r_2}\Big)$$
$$= -1.$$

$\therefore$ S_1, S_2, S_3 ஒரு கோடமைவன. (மெனிலாஸ் தேற்றம்)

4. இரண்டு வட்டங்களின் மையங்கள் முறையே O_1, O_2. அவற்றின் ஆரங்கள் r_1, r_2. வடிவொப்பு வட்டத்தின் மையம் O, P அதன் மேல் ஏதாவது ஒரு புள்ளி. PT_1, PT_2 Pயி லிருந்து வட்டங்கள் (O_1), (O_2)க்கு வரையப்பட்ட தொடு கோடுகள்.

$\frac{O_1O}{O_2O} = \frac{PT_1^2}{PT_2^2}$ என நிருபிக்கவும்.



III படம் 19

கொள்கை : (1) $\odot(O_1)$, $\odot(O_2)$ வின் வடிவொப்பு மையங்கள் S, S'.

(2) வட்டங்களின் ஆரங்கள் r_1, r_2.

(3) வடிவொப்பு வட்ட மையம் O.

(4) P அந்த வட்டத்தின் மேல் ஒரு புள்ளி.

(5) PT_1, PT_2 வட்டங்களுக்குத் தொடு கோடுகள்.

நிரூபிக்க : $\frac{O_1O}{O_2O}=\frac{PT_1^2}{PT_2^2}$ என.

நிரூபணம் : S, S' வடிவொப்பு மையங்கள்.

$$\therefore \quad \frac{O_1S}{O_2S}=\frac{O_1S'}{O_2S'}=\frac{r_1}{r_2}.$$

$$\therefore \quad \frac{r_1}{r_2}=\frac{O_1S+O_1S'}{O_2S+O_2S'}=\frac{O_1S-O_1S'}{O_2S-O_2S'}$$

$$=\frac{2OO_1}{2\,OS}=\frac{2\,OS}{2\,OO_2}$$

$$\therefore \quad \frac{r_1}{r_2}=\frac{OO_1}{OS}=\frac{OS}{OO_2}.$$

$$\therefore \quad \frac{r_1^2}{r_2^2}=\frac{OO_1}{OO_2}.$$ (முதல் விகிதத்தின் வர்க்கமும், 2, 3 விகிதங்களின் பெருக்குத் தொகையும்)

P, வடிவொப்பு வட்டத்தின் மேல் ஒரு புள்ளி.

$$\therefore \quad \frac{PO_1}{PO_2}=\frac{r_1}{r_2}$$

$$=\frac{O_1T_1}{O_2T_2}.$$

$$\therefore \quad \frac{PO_1}{O_1T_1}=\frac{PO_2}{O_2T_2}.$$

$\therefore \quad \triangle PT_1O_1$, $\triangle PT_2O_2$ இல்

$\angle PT_1O_1=\angle PT_2O_2=90°$.

$$\frac{PO_1}{O_1T_1}=\frac{PO_2}{O_2T_2}$$ (நிரூபித்தபடி)

$\therefore \quad \triangle PT_1O_1 \;|||\; \triangle PT_2O_2$.

$$\therefore \quad \frac{PT_1}{PT_2}=\frac{O_1T_1}{O_2T_2}$$

$$=\frac{r_1}{r_2}.$$

$$\therefore \quad \frac{r_1^2}{r_2^2}=\frac{PT_1^2}{PT_2^2}.$$

$$\therefore \quad \frac{OO_1}{OO_2}=\frac{PT_1^2}{PT_2^2}.$$

பயிற்சிக் கணக்குகள் செய்ய சில உதவி குறிப்புகள்.

வட்டமையங்கள் O_1, O_2, ஆரங்கள் r_1, r_2, வடிவொப்பு, மையங்கள் $S S'$)

1. $(O_1 O_2, S' S) = -1$.

இது, O^1 O_2, SS' இவற்றில் ஒன்றை விட்டமாக உள்ள வட்டம், மற்ற புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் வட்டத்தைக் குத்தாக வெட்டும். இரண்டு வட்டங்கள் குத்து வட்டங்கள் என்று நிரூபிக்க இதை உபயோகிக்கலாம்.

2. (1) $$\frac{O_1 S'}{S' O_2} = \frac{O_1 S}{O_2 S} = \frac{O_1 T_1}{O_2 T_2} = \frac{O_1 P_1}{O_2 P_2} = \frac{P O_1}{PO_2}$$
$$= \frac{P T_1}{PT_2} = \frac{r_1}{r_2}.$$

(P, வடி வொப்பு வட்டத்தின் மேல் ஒரு புள்ளி. PT_1, PT_2 அதிலிருந்து வட்டங்களுக்கு வரையப்பட்ட தொடுகோடுகள். P_1, P_2 ஒத்த புள்ளிகள்)

(2) $\triangle PO_1 T_1 \equiv \triangle PO_2 T_2$.

இவற்றை நினைவில் வைத்தல் நலம்.

3. இரண்டு ஆரங்கள் இணை என்று நிரூபிக்க, அவற்றின் முனைகளைச் சேர்க்கும் கோடு S, அல்லது S' வழிச் செல்கிறதா என்று பாருங்கள்.

4. 3 புள்ளிகள் ஒரு கோடமைவன என நிரூபிக்க, 2 புள்ளிகள் 2 வட்டங்க்ளில் இணை ஆரங்களின் முனைகளா? மற்ற புள்ளி ஒரு வடிவொப்புமையமா ? என்று பாருங்கள்.

5. (1) முக்கோணத்தில் உள் வட்டம், A க்கு எதிரே உள்ள் வெளி வட்டம் இவற்றின் வெளி வடிவொப்பு மையம் A. AI, BG ஐ X இல் வெட்டினுல், X இவற்றின் உள் வடிவொப்பு மையம்.

(2) 9–புள்ளி வட்டத்தின் மையம் SO வின் நடுப் புள்ளி, அதன் ஆரம் $\frac{1}{2}$ R.

$\triangle$ $I_1 I_2 I_3$ யில் I குத்து சந்தி, வட்டம் ABC, 9 புள்ளி வட்டம் இவற்றை ஞாபகத்தில் வைத்தல் நலம்.

6. S, S^1 வழிக் கோடுகள் வரைந்தால் ஒத்த புள்ளிகள் வேற்றுப் புள்ளிகளைக் கவனியுங்கள். O_1P_1, O_2 P_2 முதலியன இணைகோடுகள்.

$$\triangle\ SO_1 P_1 \equiv \triangle SO_2 P_2.$$

7. 4 புள்ளிகள் வட்டப் பரிதியிலுள்ளனவா என்று நிரூபிக்க, அவை இரண்டு ஜதை வேற்றுப் புள்ளிகளா என்று பாருங்கள். T_1, T_2 உம் ஒரு ஜதை வேற்றுப் புள்ளிகளும் ஒரு வட்டப் பரிதியில் உள்ளவை.

8. 2 வட்டங்கள் A, B யில் வெட்டினுல்,

$t_1 t_2 = SA^2 = SB^2$ இதை உபயோகிக்கலாம்.

9. ஒரு புள்ளியின் நியமப்பாதை வடிவொப்பு வட்டம் என்று நிரூபிக்க.

(1) P வட்டங்களின் மையங்கள் O_1, O_2

(2) PS, PS'; $\angle O_1 P O_2$ இன் இருசமவெட்டிகளா ?

(3) $\dfrac{PO_1}{PO_2} = \dfrac{r_1}{r_2}$?

(4) $\dfrac{PT_1}{PT_2} = \dfrac{r_1}{r_2}$?

(5) $\angle O_1 P T_1 = \angle O_2 P T_2$?

என்று பார்க்கவும்.

10. S, S' எப்படிக் கண்டு பிடிப்பது ?

(1) $O_1 O_2$ வை $r_1 : r_2$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளிகள் S, S'.

(2) பொதுத் தொடுகோடுகள் வட்டமையங்கள் நேர்கோட்டைச் ($O_1 O_2$) சந்திக்கும் புள்ளிகள் S, S'.

(3) இரண்டு இணை ஆரங்களின் முனைகளைச் சேர்க்கும் நேர்கோடு $O_1 O_2$ ஐச் சந்திக்கும் புள்ளி S அல்லது S'.

(4) $(O_1 O_2, S S') = -1$, $\dfrac{O_1 S}{O_2 S} = \dfrac{r_1}{r_2}$ என்றுல் S' மற்றொரு வடிவொப்பு மையம்.

(5) P ஒரு புள்ளியானுல், $\dfrac{PO_1}{PO_2} = \dfrac{r_1}{r_2}$ ஆனுல், SP, $S'P$, $\angle O_1 P O_2$ இன் இருசம வெட்டிகள்.

11. ஒரு வட்டமும் ஒரு நேர்கோடும் கொடுத்தால் நேர்கோட்டை எட்டாப் புள்ளியை மையமாகக் கொண்ட வட்டமாகக் கொள்ளலாம்.

12. மூன்று வட்டங்களின் மையங்கள் A, B, C என்ருல் ABC யின் பக்கங்களை வடிவொப்பு மையங்கள் $r_1 : r_2; r_2 : r_3; r_3 : r_1$, என்னும் விகிதங்களில் பிரிக்கின்றன. இதையும் சீவாஸ், மெனிலாஸ் தேற்றங்களையும் உபயோகித்துச் சில முடிவுகள் காணலாம்.

13. கவனிக்கவும்

(1) வடிவொப்பு வட்டத்தின் மையம் $O_1 O_2$ இல் இருக்கும்.

(2) $O_1 O_2$ வை விட்டமாகவுடைய வட்டம் வடிவொப்பு வட்டத்தைக் குத்தாக வெட்டிஞலும், அந்த இரண்டு வட்டங்களையும் குத்தாக வெட்டுவதில்லை. அதன் மையம், $\odot (O_1)$, $\odot (O_2)$ இவற்றின் அச்சிலும் கிடையாது.

பயிற்சி 15(a)

1. இரண்டு வட்டங்களின் மையங்கள் B, C யும், அவற்றின் ஆரங்களின் விகிதம் $AB:AC$ யும் ஆனுல், வட்டங்களின் வடிவொப்பு விட்டம். $\triangle ABC$ யின் அப்போலானியஸ் வட்டமாகும் என நிரூபிக்கவும்.

2. இரு வட்டங்களின் வடிவொப்பு மையம் S, அதிலிருந்து $ST_1 T_2$ என்னும் பொதுத் தொடுகோடும், $SP_1 P_2$ என்னும் ஒத்த புள்ளிகள் P_1, P_2 ஐ இணைக்கும் கோடும் வரையப்படுகின்றன.

$$\frac{ST_1}{ST_2} = \frac{SP_1}{SP_2}$$ என நிரூபிக்கவும்.

3. இரு வட்டங்களின் வடிவொப்பு மையத்திலிருந்து ஒரு பொதுத் தொடுகோடு வட்டங்களை T_1, T_2 வில் தொடுகிறது. P_1, P_2 ஒரு ஜதை ஒத்த புள்ளிகள். $T_1 P_1$, $T_2 P_2$ க்கு இணையென நிருபிக்க.

4. ஒரு வடிவொப்பு மையத்திலிருந்து இரண்டு வட்டங்களையும் P_1, Q_1; P_2, Q_2 இல் வெட்டும்படி ஒரு கோடு வரைந்தால் $P_1 Q_1 : P_2 Q_2 = r_1 : r_2$ என நிரூபிக்கவும்.

5. இரண்டு வட்ட மையங்களை அவற்றின் வடிவொப்பு மையங்கள், இசையாகப் பிரிக்கின்றன என நிரூபிக்கவும்.

6. இரு வட்டங்களின் மையங்கள், வடிவொப்பு வட்டத்துக்குத் தன்மாற்றுப் புள்ளிகள் என்று நிரூபிக்கவும்.

7. வடிவொப்பு மையம் வழி வரையப்பட்ட ஒரு நேர் கோடு வட்டங்களை A, B; C, D யில் வெட்டுகிறது. வட்டங்களுக்கு AB யின் போல் T_1, CD யின் போல் T_2. $\frac{OT_1}{OT_2} = \frac{r_1}{r_2}$ என நிருபிக்க.

பயிற்சி 15 (b)

1. வடிவொப்பு வட்டத்தின் மேல் எந்தப் புள்ளியிலும், இரு வட்டங்களும் சம கோணங்களைத் தாங்குகின்றன என்று காட்டுக.

2. ஒரு முக்கோணத்தின் சுற்று வட்டத்துக்கும் 9 புள்ளி வட்டத்துக்கும் குத்துச் சந்தி வடிவொப்பு மையம் என்று நிருபிக்கவும். மற்றொரு வடிவொப்பு மையம் என்ன?

3. முக்கோணத்தின் ABC யின் உள் வட்ட மையம் I. வெளி வட்டமையங்கள் I_1, I_2, I_3. $\odot\, I_1 I_2 I_3$ $\odot\, ABC$ இவற்றின் வடிவொப்பு மையம் I என்று காட்டுக.

4. இரு வட்டங்களின் வடிவொப்பு வட்டம், வட்ட மையங்களின் வழிச் செல்லும் எந்த வட்டத்தையும் குத்தாக வெட்டும் என நிருபிக்கவும்.

5. $\triangle ABC$ யில் I உள் வட்டமையம். I_1, A க்கு எதிரே உள்ள வெளி வட்டமையம். AII_1, BC யை X இல் வெட்டுகிறது. உள்வட்டம் வெளி வட்டம் இவற்றின் வடிவொப்பு வட்டம், AX ஐ விட்டமாகவுடைய வட்டம்), என நிருபிக்க.

6. வடிவொப்பு மையம் S வழியே ஒரு கோடு வரையப் படுகிறது. இரு வட்டங்களுக்கும் அக்கோட்டின் போல்கள் (இசைப்புள்ளிகள்), S உடன் ஒரு கோடமைவன என்று நிருபிக்கவும்.

7. வடிவொப்பு மையத்திலிருந்து வரையப்படும் இரண்டு கோடுகள் ஒரு வட்டத்துக்குத் துணையியக் கோடுகள் என்றால், அவை மற்ற வட்டத்துக்கும் துணையியக் கோடுகளாகும் என்று நிருபிக்கவும்.

8. ஒரு வட்டத்தையும் ஒரு நேர்கோட்டையும் தொடும்படி ஒரு வட்டம் வரைந்தால் தொடு புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடு இரண்டு குறிப்பிட்ட புள்ளிகளில் ஒன்றின் வழியே செல்லும் என நிருபிக்கவும்.

9. இரண்டு வட்டங்களை வெளியே தொடும்படி இன்னும் இரண்டு வட்டங்கள் வரைந்தால், 4 தொடு புள்ளிகளும் ஒரு வட்டப் பரிதிலுள்ள புள்ளிகள் என நிரூபிக்கவும்.

10. இரண்டு வட்டங்களின் நேர் பொதுத் தொடுகோடுகள் அவற்றை T_1, T_2, T_3, T_4 இல் தொடுகின்றன. இரண்டு குறுக்கு பொதுத் தொடுகோடுகளும் அவற்றை T_1', T_2' T_3', T_4' இல் தொடுகின்றன. $T_1 T_2 T_3 T_4$, $T_1' T_2' T_3' T_4'$ வட்ட நாற்கரங்கள் என நிரூபிக்கவும்.

11. இரு வட்டங்கள் A, Bயில் வெட்டுகின்றன. $T_1 T_2$ ஒரு நேர் பொதுத் தொடுகோடு. S வெளி வடிவொப்பு மையம். $ST_1.ST_2 = SA^2 = SB^2$ என நிரூபிக்கவும்.

12. இரு வட்டங்கள் A,B யில் வெட்டுகின்றன. $T_1 T_2$ ஒரு நேர் பொதுத் தொடுகோடு. வட்டம் AT_1T_2 ஐ SA தொடுகிறது என நிரூபிக்கவும்.

13. ஒரு வட்டம் இரண்டு கொடுக்கப்பட்ட வட்டங்களை முறையே A,B; C, D யில குத்தாக வெட்டுகிறது. AD, BC இவை ஒரு வடிவொப்பு மையத்தின் வழிச் செல்லும் என நிரூபிக்கவும்.

14. $\triangle ABC$ யில் உள் வட்டம் BC க்கு இணையான ஒரு கோட்டை A' இல் தொடுகிறது A க்கு எதிரே உள்ள வெளி வட்டம் BC யை X_1 இல் தொடுகிறது. A_1, A' X_1 ஒரு கோடமைவன என்று நிரூபிக்கவும்.

15. இரு வட்டங்களுக்கு PQ நேர்ப் பொதுத் தொடுகோடு. S வெளி வடிவொப்பு மையம். S' உள்வடிவொப்பு மையம். S' P அடுத்த வட்டத்தை X, Y இல் வெட்டுகிறது. QX அல்லது QY அந்த வட்டத்துக்கு ஒரு விட்டம் என நிரூபிக்கவும்.

16. 3 வட்டங்களின் மையங்கள் O_1, O_2, O_3. O_1, O_2, O_3 ஒரு நேர் கோட்டில் இல்லை. S_1, S_2, S_3; வட்டங்கள் (O_2), (O_3); (O_3), (O_1); (O_1), (O_2) இவற்றின் உள் வடிவொப்பு மையங்கள். O_1S_1, O_2S_2, O_3S_3 ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள் என்று நிரூபிக்கவும்.

17. 3 வட்டங்களை இரண்டிரண்டாக எடுத்து அவற்றின் வடிவொப்பு மையங்கள் குறித்தால் 6 வடிவொப்பு மையங்களாகும் எனக் காட்டுக. நாற்கரத்தின் பக்கங்களை எழுதுக.

18. இரண்டு வட்டங்கள் A, B யில் வெட்டுகின்றன. $T_1 T_2$ ஒரு நேர் பொதுத் தொடுகோடு. S வெளி வடிவொப்பு மையம். $\angle BAT_2$, $\angle T_1BS$ இவை சமம் அல்லது மிகை நிரப்பிகள் என்று நிரூபிக்கவும்.

19. $\triangle ABC$ யில் AB, AC யின் மையப்புள்ளிகள் C_1, B_1 AB, AC யை விட்டங்களாகவுடைய வட்டங்களின் வடிவொப்பு வட்டத்தை, வட்டம் A, B, C_1 குத்தாக வெட்டுகிறது என்று நிரூபிக்கவும்.

20. முக்கோணம் ABC யில் A யின் உள் இரு சமவெட்டி BC யை Pயில் வெட்டுகிறது. A, P இய உள் வட்டம், A க்கு எதிரேயுள்ள வெளிவட்டம் இவற்றின் வடிவொப்பு மையங்கள் எனக் காட்டுக. (செ. ப)

21. ஒரு முக்கோணத்தின் குத்துமையமும் நடுகோட்டு மையமும் (Centerid) சுற்று வட்டம் ஒன்பது புள்ளி வட்டம் இவற்றின் வடிவொப்பு மையங்கள் எனக் காட்டுக. (செ. ப)

22. (a) ஒரு தளத்தில் A, B என்னும் இரண்டு புள்ளிகள் கொடுத்திருக்க $PA : PB$ ஒரு குறிப்பிட்ட விகிதம் $(\mp 1 : 1)$ இருக்குமாறு உள்ள P என்னும் புள்ளிகளின் தொகுதி (set of points P) ஒரு வட்டத்தில் அமையும் எனவும் அந்த வட்டத்துக்கு A, B தன் மாற்றுப் புள்ளிகள் எனவும் நிரூபிக்கவும்.

23. (b) BC, $AB : AC$ $(\mp 1 : 1)$ A வழி நடுக்கோடு l இவை கொடுத்திருந்தால் $\triangle ABC$ வரைய நிரூபணத்துடன் ஒரு முறை தருக. (செ. ப)

IV. சமத் தொடுகோட்டச்சும் ஓரச்சு வட்டங்களும்

(Radical axis and Coaxal circles)

வரையறை :

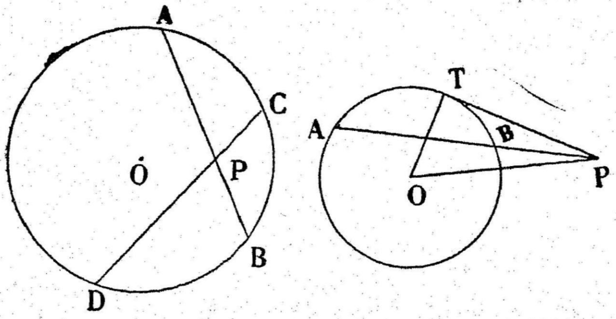
O மையமாகவும் r ஆரமாகவும் உள்ள ஒரு வட்டத்தின் தளத்தில் P என்னும் ஒரு புள்ளி இருந்தால், $OP^2 - r^2$ அந்த வட்டத்துக்கு P யின் வர்க்கம் (*Power*) எனப்படும்.

குறிப்பு : 1) அந்தப் புள்ளி வட்டத்துக்கு வெளியே இருந்தால் அதன் வர்க்கம் அதிலிருந்து வட்டத்துக்கு வரையப் பட்ட தொடுகோட்டின் நீளத்தின் வர்க்கமாகும். அப்பொழுது அது பாஸிடிவ் எண். (நேரெண்)

2) புள்ளி வட்டத்தின் மேல் இருந்தால் அதன் வர்க்கம் பூஜ்யமாகும்.

3) புள்ளி வட்டத்தின் உள்ளே இருந்தால் அதன் வர்க்கம் நெகடிவ் (எதிரெண்) ஆகும்.

4) ஒரு வட்டத்திற்கு ஒரு புள்ளியின் வர்க்கம் அதிலிருந்து வரையப்படும் நாணின் துண்டங்களின் பெருக்கற் பலனுக்குச் சமம்.



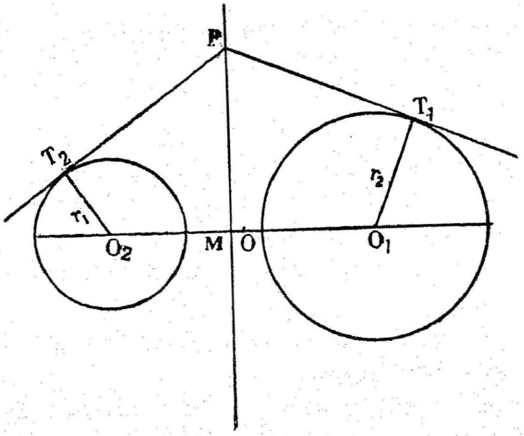
IV படம் 1

P வெளியே இருந்தால் P யின் வர்க்கம் $= OP^2 - r^2$
$= PT^2$
$= PA \cdot PB.$

P விட்டத்தின் உள்ளே இருந்தால்
P யின் வர்க்கம் $= OP^2 - r^2$
$= PA \cdot PB.$

தேற்றம் 33

இரண்டு வட்டங்களுக்கு ஒரு நகரும் புள்ளியின் வர்க்கங்கள் சமமானால் அந்தப் புள்ளியின் நியமப்பாதை வட்ட மையங்களைச் சேர்க்கும் நேர்கோட்டுக்குக் குத்துக் கோடாகும்.



IV படம் 2

கொள்கை : (1) $\odot (O_1)$, $\odot (O_2)$ வின் ஆரங்கள் r_2, r_2.
(2) P என்னும் புள்ளியிலிருந்து வர்க்கங்கள்
$O_1 P^2 - r_1^2 = O_2 P^2 - r_2^2$.

நிருபிக்க : P யின் நியமப்பாதை $O_1 O_2$ க்கும் குத்துக் கோடு என.

நிருபணம் : P யிலிருந்து தொடுகோடுகள் PT_1, PT_2 வரைக.
PM, $O_1 O_2$ க்குக் குத்தாக வரைக.
$O_1 O_2$ வின் மையப் புள்ளி O என்போம்.
$PO_1^2 - r_1^2 = PO_2^2 - r_2^2$ (கொள்கை)
$\therefore PM^2 + O_1 M^2 - r_1^2 = PM^2 + O_2 M^2 - r_2^2.$

$(PM \perp O_1O_2)$

$\therefore \quad O_1M^2 - r_1^2 = O_2M^2 - r_2^2$

$\therefore \quad O_1M^2 - O_2M^2 = r_1^2 - r_2^2.$

(அ—து) $(O_1M + O_2M)(O_1M - O_2M) = r_1^2 - r_2^2.$

$O_1M + O_2M = O_1O_2$

$O_1M - O_2M = 2OM.$

$\therefore \quad O_1O_2 \cdot 2OM = r_1^2 - r_2^2.$

$\therefore \quad OM = \dfrac{r_1^2 - r_2^2}{2\,O_1O_2}$

$\dfrac{r_1^2 - r_2^2}{2\,O_1O_2}$ ஒரு மாறிலி. (Constant)

$\therefore$ M ஒரு நிலையான புள்ளி.

$\therefore$ M வழியே வரையப்பட்ட குத்துக் கோடும் நிலையானது.

$\therefore$ P யின் நியமப்பாதை M வழியே O_1O_2 க்கு வரையப்பட்ட குத்துக் கோடாகும்.

வரையறை :

P யின் நியமப்பாதை சமத்தொடு கோட்டு அச்சு (radical axis) எனப்படும்.

M, சமத்தொடு கோட்டு அச்சடி எனப்படும். (foot of the radical axis)

சமத்தொடு கோட்டச்சு (radical axis)

இரண்டு வட்டங்களுக்கு ஒரு புள்ளியின் வர்க்கம் சமமாகும்படி ஒரு புள்ளி நகர்ந்தால் அதன் நியமப்பாதை வட்ட மையங்களைச் சேர்க்கும் கோட்டுக்குக் குத்துக் கோடாகும். அந்த நியமப்பாதை சமத்தொடு கோட்டச்சு எனப்படும்.

சமத்தொடு கோட்டச்சு (radical axis)

1. சமத்தொடு கோட்டச்சு நேர்கோடானதால் அதை இரண்டு புள்ளிகள் தெரிந்தால் நிர்ணயிக்கலாம்.

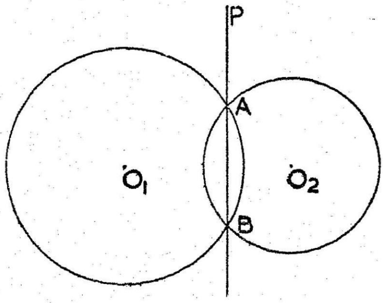
2. வட்ட மையங்களும் அச்சில் ஒரு புள்ளியும் தெரிந்தாலும் நிர்ணயிக்கலாம்.

3. சமத்தொடு கோட்டச்சில் ஒரு புள்ளியிலிருந்து இரண்டு வட்டங்களுக்கும் வரையப்படும் தொடுகோடுகள் சமம்.

4. சமத்தொடு கோட்டச்சில் ஒரு புள்ளியை மையமாகவும் அதிலிருந்து வட்டங்களுக்கு வரையப்பட்ட தொடு கோடுகளை ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டம் இரு வட்டங்களையும் குத்தாக வெட்டும்.

(ஒரு வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து வரையப்பட்ட தொடு கோட்டின் நீளம் வட்டத்தின் ஆரத்திற்குச் சமமானல் வட்டங்கள் குத்து வட்டங்கள்)

4. இரண்டு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொண்டால் அவற்றின் பொது நாண் சமத்தொடு கோட்டச்சாகும்.



IV படம் 3

வட்டங்கள் (O_1), (O_2), A, B யில் வெட்டிக் கொள்கின்றன. P, AB யில் ஒரு புள்ளி.

1) வட்டங்கள் இரண்டுக்கும் P யின் வர்க்கம்
$= PA.\ PB. =$ சமம்.
$\therefore$ P யின் நியமப்பாதை AB.

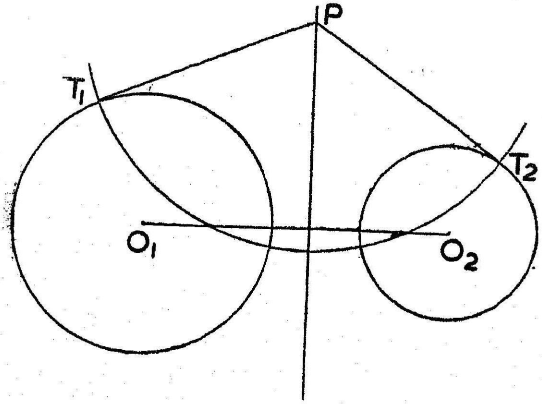
அல்லது

2) சமத்தொடு கோட்டச்சு கண்டுபிடிகக அதில் 2 புள்ளிகள் தெரிந்தால் போதும். A, B இவற்றிலிருந்து வட்டங்களுக்கு வரையப்படும் தொடு, கோடுகளின் நீளங்கள் பூஜ்யமாகும்.
$\therefore$ வட்டங்களுக்கு A, B யின் வர்க்கங்கள்

$$\left.\begin{array}{l} A\,O_1^2 - r_1^2 = O. \\ A\,O_2^2 - r_2^2 = O. \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} B\,O_1^2 - r_1^2 = O \\ B\,O_2^2 - r_2^2 = O. \end{array}$$

$\therefore$ வர்க்கங்கள் சமம்.
$\therefore$ A, B சமத்தொடு கோட்டச்சிலுள்ள புள்ளிகள்.
$\therefore$ சமத்தொடு கோட்டச்சு AB யாகும்.

5. ஒரு வட்டம் இரண்டு வட்டங்களைக் குத்தாக வெட்டினால் அதன் மையம் இரண்டு வட்டங்களின் சமத்தொடு கோட்டச்சில் இருக்கும்.



IV படம் 4

P யை மையமாகக் கொண்ட வட்டம், வட்டங்கள் (O_1), (O_2) வைக் குத்தாக வெட்டுகிறது.

$\therefore$ P யிலிருந்து வட்டம் (O_1) க்குத் தொடுகோடு, வட்டத்தின் ஆரத்துக்குச் சமம்.

(அ—து) $PT_1 =$ வட்டத்தின் ஆரம்.

அதேபோல $PT_2 =$ வட்டத்தின் ஆரம்.

வட்டத்தின் ஆரங்கள் சமம்.

$$\therefore \quad PT_1 = PT_2.$$

$\therefore$ P, சமத்தொடு கோட்டச்சில் உள்ளது.

6. இரண்டு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று தொட்டுக் கொண்டால் அவற்றின் சமத்தொடு கோட்டச்சு தொடு புள்ளியில் வரையப்படும் பொதுத் தொடு கோடு ஆகும்.

இரண்டு வட்டங்களுக்கும் தொடு புள்ளியின் வர்க்கம் பூஜ்யம்.

$\therefore$ சமத்தொடு கோட்டச்சு தொடு புள்ளி வழிச் செல்கிறது.

$\therefore$ அது அப்புள்ளி வழியே வட்ட மையங்களைச் சேர்க்கும் கோட்டுக்குக் குத்துக் கோடு.

$\therefore$ அது தொடு புள்ளி வழிப் பொதுத்தொடு கோடு ஆகும்.

7. இரண்டு வட்டங்கள் வெட்டாத வட்டங்களானால் சமத்தொடு கோட்டச்சு வட்டங்களுக்கு வெளியே இருக்கும்.

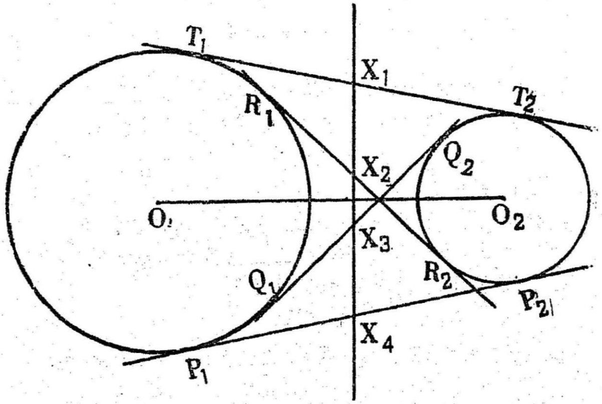
சமத்தொடு கோட்டச்சு ஒரு வட்டத்தை வெட்டினால், அப்புள்ளியின் வர்க்கம் பூஜ்யம். ஆகையால் அப்புள்ளியின் வர்க்கம் மற்ற வட்டத்துக்கும் பூஜ்யமாக இருக்க வேண்டும்.

∴ மற்ற விட்டமும் அப்புள்ளி வழியே செல்ல வேண்டும்.

(அ—து) இரண்டு வட்டங்களும் அப்புள்ளியில் வெட்டிக் கொள்ள வேண்டும்.

ஆனால் வட்டங்கள் வெட்டிக் கொள்ளவில்லை என்று கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறபடியால், சமத்தொடு கோட்டச்சு ஒரு வட்டத்தையும் வெட்ட முடியாது. அது இரு வட்டங்களுக்கும் வெளியே இருக்கும்.

8. இரு வட்டங்களின் அச்சு, வட்டங்களின் பொதுத் தொடு கோடுகளின் நடுப்புள்ளிகள் வழிச் செல்லும்.



IV படம் 5

$T_1 T_2$ பொதுத் தொடு கோடு X_1 நடுப்புள்ளி.

∴ $X_1 T_1 = X_1 T_2$.

∴ X_1 சமந்தொடு கோட்டச்சில் உள்ளது.

அதுபோலவே X_2, X_3, X_4 உம் சமத்தொடு கோட்டச்சில் உள்ளன.

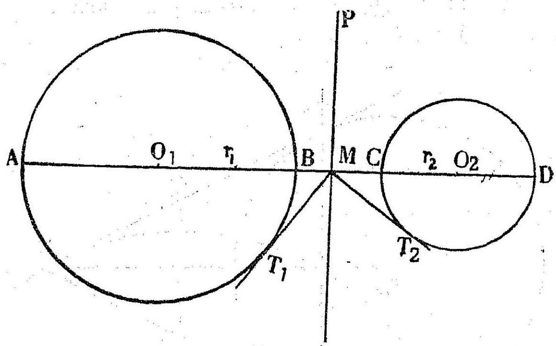
இதிலிருந்து இரண்டு வட்டங்களுக்கு வரையப்பட்ட 4 நான்கு பொதுத் தொடுகோடுகளின் நடுப்புள்ளிகளும் ஒரு கோடமைவன என்பது தெரிகிறது.

குறிப்பு :

இனி சமத் தொடுகோட்டச்சு என்பதற்கு பதிலாக சுருக்கமாக 'அச்சு' என்றே குறிப்பிடுவோம்.

மாதிரிகள் :

1. இரண்டு வட்டங்களில் ஒன்று பெரியதானுல், அவ் வட்டங்களின் அச்சு பெரிய வட்டத்தின் அருகே அமையும் என நிரூபிக்க.



IV படம் 6

கொள்கை : (1) வட்டம் (O_1), வட்டம் (O_2) வின் ஆரங்கள் r_1, r_2

(2) PM அவற்றின் அச்சு $\odot M$ அச்சின் அடி.

நிரூபிக்க : PM வட்டம் (O_1) இன் அருகே உள்ளது.
(அ-து) $BM < CM$ என.

வரைதல் : MT_1, MT_2 என்னும் தொடுகோடுகள் வரைக.
O_1O_2 வட்டங்களை A,B,C,D யில் வெட்டட்டும்.

நிரூபணம் : $MT_1 = MT_2$ (M அச்சில் இருப்பதால்)

$\therefore \quad MO_1^2 - r_1^2 = MO_2^2 - r_2^2.$

$\therefore \quad (MO_1 + r_1)(MO_1 - r_1) = (MO_2 + r_2)(MO_2 - r_2)$

$\therefore \quad MA.\ MB = MC.\ MD.$

மேலும் $MO_1^2 - r_1^2 = MO_2^2 - r_2^2.$

$\therefore \quad MO_1^2 - MO_2^2 = r_1^2 - r_2^2.$

$\therefore \quad r_1 > r_2$. ஆனுல்

$MO_1 > MO_2.$

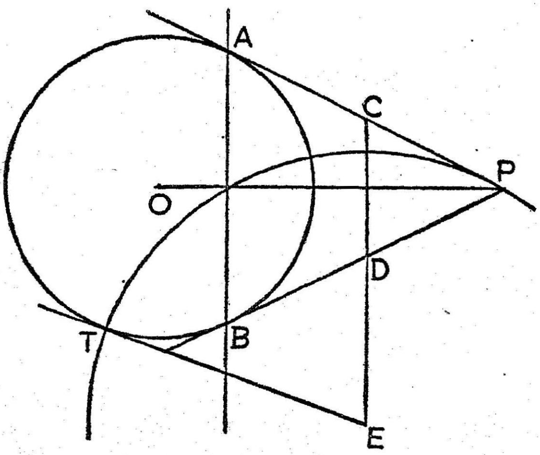
$\therefore \quad MO_1 + r_1 > MO_2 + r_2$

(அ-து) $MA > MD$,

ஆனால் $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.

$\therefore \quad MB < MC$.

2. வட்டம் (O) க்கு வெளியே P ஒரு புள்ளி. AB, P யின் தொடு நாண். PA, PB யின் நடுப்புள்ளிகள் C, D. E, CD யில் ஏதாவது ஒரு புள்ளி. E யை மையமாகக் கொண்டு வட்டம் (O) வைக் குத்தாக வெட்டும் வட்டம் P வழிச் செல்லும் என நிருபிக்க.



V படம் 7

கொள்கை : (1) வட்டம் (O) விற்கு வெளியே P ஒரு புள்ளி.

(2) C, D, P யிலிருந்து வரையப்பட்ட தொடு கோடுகளின் நடுப்புள்ளிகள்.

(3) E CD யில் ஏதாவது ஒரு புள்ளி.

நிரூபிக்க : E யை மையமாக்கிகொண்டு வட்டம் (O) வைக் குத்தாக வெட்டும் வட்டம் P வழிச் செல்லும் என.

வரைதல் : E யிலிருந்து ET என்னும் தொடுகோடு வரைக.

நிருபணம் : P யை ஒரு புள்ளி வட்டம் எனக் கொள்க.

PA, PB இவ்வட்டங்களுக்குப் பொதுத்தொடுகள்.
இவற்றின் நடுப்புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோடு C, D, வட்டங்களின் அச்சு.

CD யில் எந்தப் புள்ளி எடுத்தாலும், அதிலிருந்து வட்டம் O க்கும் P க்கும் வரையும் தொடுகோடுகள் சமம்.

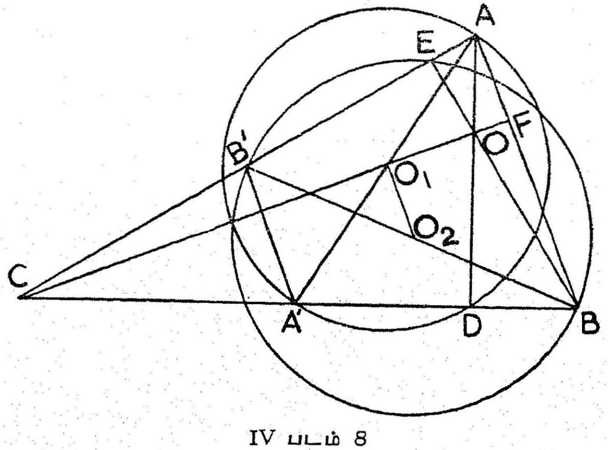
$\therefore \quad ET = EP$

$\therefore$ E மையமாகவும் ET ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டம் P வழிச் செல்லும்.

ஆனால் E மையமாகவும் ET ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டம், வட்டம் (O) வைக் குத்தாக வெட்டும்.

$\therefore$ E யை மையமாகக் கொண்டு வட்டம் (O) வைக் குத்தாக வெட்டும் வட்டம் P வழிச் செல்லும்.

3. $\triangle ABC$ யில் A', B' முறையே BC, CA யின் நடுப்புள்ளிகள். AA', BB' விட்டங்களாகவுடைய வட்டங்களுக்கு CF என்னும் குத்துக்கோடு சமத்தொடு கோட்டச்சு என்று நிருபிக்கவும்.



IV படம் 8

கொள்கை : (1) $\triangle ABC$ யில் A', B' ; BC, CA யின் நடுப்புள்ளிகள்

(2) AA', BB, விட்டமாகவுடைய வட்டங்கள் வரையப்பட்டிருக்கின்றன.

நிருபிக்க : $AA,'$ BB' விட்டங்களாகவுடைய விட்டங்களுக்கு CF சமத்தொடு கோட்டச்சு என

நிருபணம் : AA' விட்டமாகவுடைய வட்டம் BC யை D யில் வெட்டட்டும்.

AA, க்குள் நடுப்புள்ளி O, என்போம். O, இந்த வட்டத்தின் மையமாகும்.

$\angle ADA' = 90°$ ($\frac{1}{2}$ வட்டத்தில்)

$\therefore$ AD, குத்துக்கோடு.

அதுபோலவே BE ஒரு குத்துக்கோடு.

O_2, BB' இன் நடுப்புள்ளி.

அது வட்டம் $BB'E$ இன் மையமாகும்.

A', B', D, E இவை தாங்கும் 9-புள்ளி வட்டத்திலுள்ளவை.

$\therefore$ $CE \cdot CB' = CD \cdot CA'$.

$CE \cdot CB'$ = வட்டம் $BB'E$க்கு C யின் வர்க்கம்.

$CD \cdot CA'$ = விட்டம் $AA'D$க்கு C யின் வர்க்கம்.

$\therefore$ வட்டம் $BB'E$ க்கு C யின் வர்க்கம்
= வட்டம் $AA'D$ க்கு C யின்வர்க்கம்.

$\therefore$ C இந்த வட்டங்களின் அச்சில் இருக்கிறது.

$\triangle$ ABC யில், $A'B' \parallel AB$.

O_1, AA' இன் நடுப்புள்ளி.

O_2, BB' இன் நடுப்புள்ளி.

$\therefore$ $O_1 O_2 \parallel A'B' \parallel AB$.

$\therefore$ $CF \angle O_1 O_2$

$\therefore$ CF, வட்டங்களின் அச்சில் ஒரு புள்ளி C யிலிருந்து மையங்களைச் சேர்க்கும் கோட்டுக்குச் குத்துக்கோடு.

CF, வட்டங்களின் அச்சு.

குறிப்பு : படத்தில் உள்ளதுபோல CF, O வழிச் செல்ல வேண்டியது அவசியம் இல்லை.

பயிற்சி 16 (a)

1. வெட்டிக்கொள்ளும் இரண்டு வட்டங்களைக் குத்தாக வெட்ட ஒரு வட்டம் வரைக.

2. இரண்டு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொண்டால் அவற்றின் பொதுநாண், பொதுத் தொடு கோட்டை இருசமக் கூறிடும் என நிரூபிக்கவும்.

3. இரண்டு தொடுவிட்டங்களுக்கு தொடு புள்ளியில் வரையப்படும் பொதுத் தொடுகோடு மற்ற இரண்டு பொதுத் தொடுகோடுகளையும் இரு சமக் கூறிடுகிறது என நிரூபிக்கவும்.

4. இரண்டு தொடுவட்டங்களைக் குத்தாக வெட்டும் எந்த வட்டமும் அதற்றின் தொடு புள்ளி வழியே செல்லும் எனக் காட்டுக.

5. இரண்டு வட்டங்களைக் குத்தாக வெட்டும் எல்லா வட்டங்களிலும் அச்சடி (foot of the radical axis) யை மையமாகக் கொண்ட வட்டமே மிகச் சிறியது எனக் காட்டுக.

6. $\triangle ABC$ யில் AB, ACயை விட்டங்களாகவுடைய வட்டங்களின் அச்சு AD யாகும் என நிரூபிக்கவும்.

7. $\triangle ABC$ யில் O குத்துச் சுத்தி. BO, CO விட்டங்களாக வுடைய வட்டங்களின் அச்சு AO எனக் காட்டுக.

8. இரண்டுகுத்துவட்டங்களின் அச்சு ஒரு வட்டத்துக்கு மற்ற வட்ட மையத்தின் போலாராகும் என நிறுவுக.

9. இரண்டு வெட்டும் வட்டங்களில் அச்சு ஒரு வட்டத்துக்கு மற்ற வட்டமையத்தின் போலார் ஆனால் இரண்டு வட்டங்களும் குத்து வட்டங்கள் எனக் காட்டுக.

10. X, Y என்னும் புள்ளிகள் O_1, O_2 மையமாகவுடைய இரு வட்டங்களின் அச்சில் அமைந்தால்

$O_1X^2 - O_2X^2 = O_1Y^2 - O_2Y^2$ எனக் காட்டுக.

பயிற்சி 16 (b)

1. $\triangle ABC$ யின் சுற்று வட்டத்துக்கும், I_1 ஐ விட்டமாகவுடைய வட்டத்துக்கும் அச்சு BC யெனக் காட்டுக. (I, உள்வட்ட மையம் - I_1 Aக்கு எதிரேயுள்ள வெளிவட்ட மையம்)

2. O_1, O_2 மையங்களாகவுடைய விட்டங்களின் அச்சடி M. அந்த வட்டங்களுக்கு M இன் தன் மாற்றுப் புள்ளிகள் முறையே P_1, P_2 என்றால் MO_1, $MP_1 = MO_2$, MP_2 என நிரூபிக்கவும்.

3. O_1, O_2 மையங்களாகவுடைய வட்டங்களின் அச்சடி M O_1O_2 வட்டங்களை முறையே A, B; C, D யில் வெட்டுகிறது. M ஐ மையமாகக் கொண்டு இரண்டு வட்டங்களையும் குத்தாக வெட்டும் வட்டம் O_1O_2ஐ , L_1L_2 இல் வெட்டுகிறது. AB, CD இவை இரண்டையும் L_1, L_2 ஹார்மோனிக்காகப் பிரிக்கிறது என நிரூபிக்கவும்.

4. இருவட்டங்களின் அச்சில் ஒரு புள்ளியிலிருந்து இரு வட்டங்களையும் வெட்டும்படி நேர்கோடுகள் வரைந்தால் நேர் கோடுகள் வட்டங்களை வெட்டும் 4 புள்ளிகளும் ஒரு வட்டப் பரிதியில் அமைவன என நிரூபிக்கவும். இந்த 4 புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் வட்டம் கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு வட்டங் களையும் குத்தாக வெட்டும் எனவும் நிரூபிக்கவும்.

5. (1) இரு வட்டங்களைக் குத்தாக வெட்டும் வட்டங் களின் மையங்களின் நியமப்பாதை என்ன ?

இரண்டு வட்டங்கள் வெட்டிக் கொண்டால், அவற்றின் வெட்டுப்புள்ளிகள் வட்டங்களைக்குத்தாக வெட்டும் எந்த வட்டத்துக்கும் தன் மாற்றுப் புள்ளிகள் என நிரூபிக்கவும்.

6. $\triangle ABC$ யில் BC, CA, CB யின் நடுப்புள்ளிகள் முறையே A', B', C'. I உள் வட்ட மையம். I_1, I_2, I_3 ABCக்கு எதிரே யுள்ள வெளிவட்ட மையங்கள்

(1) A' இலிருந்து AII_1க்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோடு வட்டங்கள் (I) (I_1)இன் அச்சு என்றும் நிரூபிக்கவும்.

(2) A' வழியே AII_1 க்கு இணையாக வரையப்பட்ட கோடு வட்டங்கள் (I_2), (I_3) க்கு அச்சு என்றும் நிரூபிக்கவும்.

7. $\triangle$ ABC யில் உள்வட்டம் BCயை X இலும், AB யை Z இலும் தொடுகிறது. Aக்கு எதிரே உள்ள வெளிவட்டம், BC யை X_1 இலும் AB யெ Z_1 இலும் தொடுகிறது. XX_1, ZZ_1 இவற்றின் நடுப்புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோடு உள்வட்டம் வெளிவட்டம் இவற்றின் அச்சு என நிரூபிக்கவும்.

8. AB, CD இரு வட்டங்களின் விட்டங்கள். AD முதல் வட்டத்தை E யிலும் இரண்டாவது வட்டத்தை F இலும் வெட்டுகிறது. BC முதல் வட்டத்தை Gயிலும் இரண்டாவது

வட்டத்தை H யிலும் வெட்டுகிறது. $CF, AG; BE, DH;$ என்னும் கோடுகள் வட்டங்களின் அச்சில் வெட்டுகின்றன என்று நிருபிக்கவும்.

9. 8-வது கணக்கில் AC, BDக்கு இணையானால், AD, BCயும் அச்சில் வெட்டும் என நிருபிக்கவும்.

10. $\triangle ABC$ யில் AD, BE, CF குத்துக் கோடுகள். EF, FD, DE முறையே CB, CA, AB யை A_1, B_1, C_1, இல் வெட்டுகின்றன. A_1, B_1, C_1 மூன்றும் சுற்று வட்டம், 9 புள்ளி வட்டம் இவற்றின் அச்சில் இருக்கின்றன என்றும், அதனால் அவை ஒரு கோடமைவன என்றும் நிருபிக்கவும்.

11. $\triangle ABC$யின் உள்வட்டம், பக்கங்கள் BC, CA, ABயை X, Y, Z இல் தொடுகிறது. YZ, ZX, XY இவற்றின் நடுப்புள்ளிகள் முறையே X_1, Y_1, Z_1. I உள்வட்டமையம். $XY_1 Z_1 I$' $AYZI$ இவை வட்ட நாற்கரங்கள் என்றும் வட்டங்கள் XY_1Z_1I, $AYZI$ இன் அச்சு IX' (YZ, BC யைச் சந்திக்கும் புள்ளி X') என்றும் நிருபிக்கவும்.

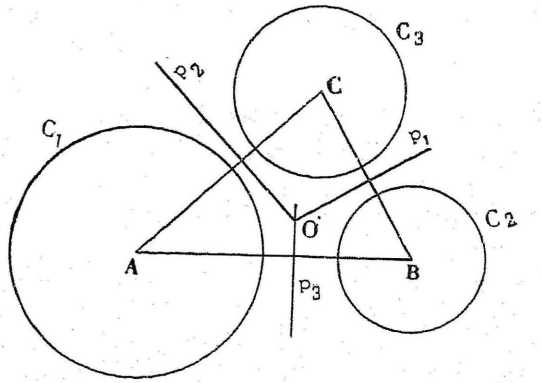
12. $\triangle ABC$ யில் BC, CA, AB இவற்றின் மையப்புள்ளிகள் A', B', C' ஆகும். $\triangle A' B' C'$ இன் கோணங்களின் இருசமவெட்டிகள் $\triangle ABC$ யின் வெளிவட்டங்களை இரண்டிரண்டாக எடுக்க அச்சுகளாகும் என நிருபிக்கவும்.

13. ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களைத் தொடும் வட்டங்களை இரண்டிரண்டாக எடுக்கஅவற்றின் 6 அச்சுகளும் ஒரு முக்கோணத்தின பக்கங்களும் அதன் குத்துக்கோடுகளும் ஆகும் என நிருபிக்கவும்.

14. ஒரு வட்டமும் இரண்டு புள்ளிகளும்கொடுக்கப்பட்டால் வட்டத்தைக் குத்தாக வெட்டும் படியும் இரண்டு புள்ளிகள் வழிச்செல்லும் படியும் ஒரு வட்டம் வரைக.

தேற்றம் 34

மூன்று வட்டங்களை இரண்டிரண்டாக எடுக்க அவற்றின் அச்சுகள் ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லும்.



IV படம் 9

கொள்கை : (1) C_1, C_2, C_3 மூன்று வட்டங்கள். அவற்றின் மையங்கள் A, B, C.

(2) C_1, C_2 இன் அச்சு p_3.
C_2, C_3 இன் அச்சு p_1
C_3, C_1 இன் அச்சு p_2.

நிரூபிக்க : p_1, p_2, p_3 ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள் என.

நிரூபணம் : p_1, p_2 O வில் வெட்டட்டும்.

p_3 உம் O வழிச் செல்லும் என நிரூபிக்க வேண்டும்.

p_1 இல் O இருப்பதால், வட்டம் C_2 க்கு Oவின் வர்க்கம் = வட்டம் C_3 க்கு O வின் வர்க்கம். O, p_2 வில் இருப்பதால் வட்டம் C_3 க்கு Oவின் வர்க்கம் = வட்டம் C_1 க்கு O வின் வர்க்கம்.

∴ வட்டம் C_1 க்கு O வின் வர்க்கம் = வட்டம் C_2 க்கு O வின் வர்க்கம்.

∴ O, p_3 இல் அமையும்.

∴ p_1, p_2, p_3 ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள்.

குறிப்பு : 1) வட்டங்களின் மையங்கள் ஒரு நேர்கோட்டில் இருந்தால், p_3, p_2, p_3 இணை கோடுகளாகும். அப்பொழுது அவை எட்டாப் புள்ளியில் (Point at infinity) சந்திக்கும்.

2) சில சமயங்களில் 3 அச்சுகளும் ஒரே நேர்கோடு ஆகும். உதாரணமாக 3 வட்டங்களும் ஒரே ஜதை புள்ளி

களில் வெட்டிக் கொண்டால் அவற்றின் அச்சுகள் ஒன்றே. (அவை ஓரச்சு வட்டங்கள் எனப்படும். அவற்றைப் பற்றி பிறகு படிப்போம்.

வரையறை :

மூன்று வட்டங்களை இரண்டிரண்டாக எடுக்க அவற்றின் அச்சுகள் சந்திக்கும் புள்ளி அச்சுச் சந்தி (Vadical centre) எனப்படும்.

குறிப்பு : அச்சுச் சந்தியை மையமாகவும், அதிலிருந்து ஏதாவது ஒரு வட்டத்துக்கு வரையப்பட்ட தொடு கோட்டை ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டம் 3 வட்டங்களையும் குத்தாக வெட்டும். 3 வட்டங்களையும் குத்தாக வெட்டும் வட்டம் ஒன்றுதான் உண்டு. மூன்று அச்சுகளும் இணையாகும்போது மூன்று வட்டங்களையும் குத்தாக வெட்டும் வட்டம் அவற்றின் மையங்களைச் சேர்க்கும் நேர்கோடு ஆகும் என்பதறிக.

கிளைத் தேற்றங்கள்

1. ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்ளும் மூன்று வட்டங்களின் பொது நாண்கள் ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகளாகும்.

(பொது நாண்கள் வட்டங்களின் அச்சுகள்)

2. மூன்று வட்டங்களை இரண்டிரண்டாக எடுக்க தொடு வட்டங்களானல், தொடு புள்ளிகளில் வரையப்பட்ட தொடு கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும்.

(தொடு கோடுகள் வட்டங்களின் அச்சுகள்)

3. மூன்று வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டவில்லையானல், அச்சுச் சந்தியிலிருந்து மூன்று வட்டங்களுக்கும் வரைந்த தொடு கோடுகள் சமம்.

(அச்சுச் சந்தியின் வர்க்கங்கள் சமம்)

4. மூன்று வட்டங்களின் அச்சுச் சந்தியை மையமாகவும் அதிலிருந்து ஒருவட்டத்துக்கு வரையப்பட்ட தொடு கோட்டை ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டம் மூன்று வட்டங்களையும்குத்தாக வெட்டும்.

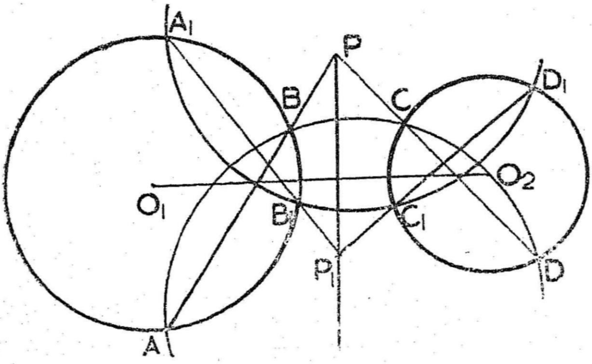
இரண்டு வட்டங்களின் அச்சு வரைய

1. இரண்டு வட்டங்கள் வெட்டிக் கொண்டால் பொது நாண் அச்சு ஆகும்.

2. இரண்டு வட்டங்கள் வெட்டவில்லையென்றல் வரைமுறை.

வட்டம் (O_1), வடடம் (O_2) கொடுக்கப்பட்ட வட்டங்கள்.

வரைமுறை 1.



IV படம் 10

மூன்றாவது ஒரு வட்டம், வட்டம் (O_1), (O_2) O ஐ A B, C, D யில் வெட்டும்படி வரைக.
AB, CD யைச் சேர்த்து நீட்டி விடவும்.
அவை P யில் வெட்டட்டும்.
நான்காவது ஒரு வட்டம், வட்டம் (O_1), (O_2)ஐ A_1, B_1; C_1, D_1 இல் வெட்டும்படி வரைக.
$A_1 B_1$, $C_1 D_1$ ஐச் சேர்த்து நீட்டி விடவும்.
அவை P_1 இல் வெட்டட்டும்.
PP_1 ஐச் சேர்.
PP_1 வட்டங்களின் அச்சு

நிருபணம் :

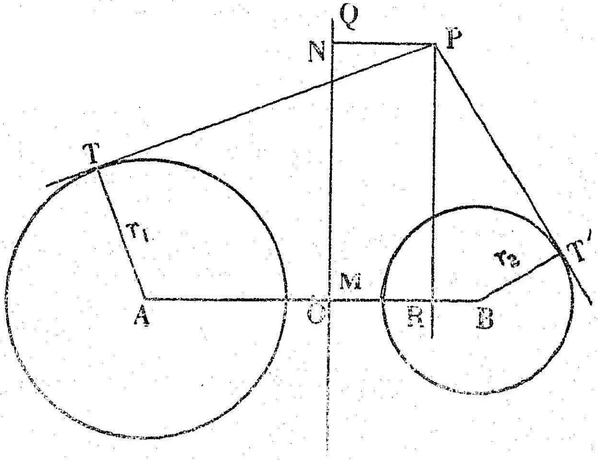
AB, CD, 3வது வட்டத்தின் நாண்கள்.
$\therefore$ $OA. PB = PC \cdot PD$.
ஆனால் $PA. PB =$ வட்டம் (O_1)க்கு P யின் வர்க்கம்.
PC, $PD =$ வட்டம் (O_2)க்கு P யின் வர்க்கம்.
$\therefore$ P வட்டங்களின் அச்சில் உள்ளது.
அதுபோலவே P_1 உம் வட்டங்களின் அச்சில் உள்ளது என நிருபிக்கவும்.
$\therefore$ PP_1 வட்டங்களின் அச்சு.

வரைமுறை 2

முன்போலவே P கண்டுபிடித்து, P யிலிருந்து O_1 O_2 க்குக் குத்துக் கோடு வரையவும். அது வட்டங்களின் அச்சு.

தேற்றம் 35

இரு வட்டங்களுக்கு ஒரு புள்ளியின் வர்க்கங்களின் வித்தியாசம், வட்டங்களின் அச்சிலிருந்து அப்புள்ளியின் குத்துத் தூரத்துடன் நேர்விகிதத்திலுள்ளது.



IV படம் 11

கொள்கை : (1) இரு வட்டங்களின் மையங்கள் A, B. ஆரங்கள் r_1, r_2.

(2) P ஏதாவது ஒரு புள்ளி.

(3) QM வட்டங்களின் அச்சு.

(4) O, AB யின் நடுப்புள்ளி.

(5) PT, PT' வட்டங்களுக்குத் தொடுகோடுகள்.

(6) PN அச்சுக்குக் குத்தாக வரையப்பட்டிருக்கிறது.

நிரூபிக்க : $(PA^2 - r_1^2) - (PB^2 - r_2^2) = PN \times$ ஒரு மாறிலி என.

நிருபணம் : AB க்குக் குத்தாக PR வரைக.

$$(PA^2 - r_1^2) - (PB^2 - r_2^2)$$
$$= (PA^2 - PB^2) - (r_1^2 - r_2^2)$$
$$= (PR^2 - RA^2 - PR^2 - RB^2) - (r_1^2 - r_2^2)$$
$$= (RA^2 - RB^2) - (r_1^2 - r_2^2)$$

$$AR^2-RB^2 = (AR+RB)(AR-RB)$$
$$= AB.\ 2\,OR$$
$$= 2\,AB\cdot OR$$

மேலும் வட்டங்களுக்கு M இன் வர்க்கங்கள் சமம்.

$$\therefore\ MA^2-r_1^{\ 2} = MB^2-r_2^{\ 2}.$$
$$\therefore\ r_1^{\ 2}-r_2^{\ 2} = MA^2-MB^2$$
$$= (MA+MB)(MA-MB)$$
$$= AB\cdot 2\,OM$$
$$= 2\,AB\cdot OM.$$
$$\therefore\ (AR^2-RB^2)-(r_1^{\ 2}-r_2^{\ 2}) = 2\,AB.\,(OR-OM)$$
$$= 2\,AB\,(MR)$$
$$= 2\,AB.\,NP.$$

$\therefore$ P யின் வர்க்கங்களின் வித்தியாசம்

$$= 2\,AB.\,NP$$
$$= NP.\ \text{மாறிலி(Constant)}.$$

(அ-து) அது $= PN$ உடன் நேர் விகிதத்திலுள்ளது.

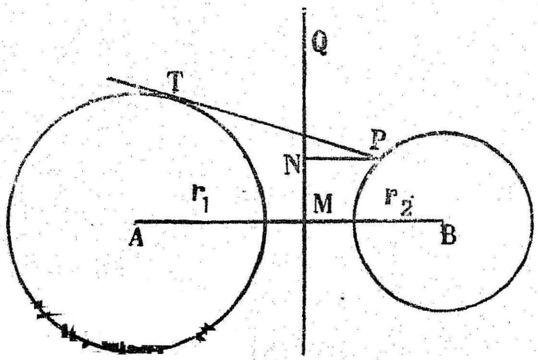
குறிப்பு: P, வட்டம் (B)யில் இருந்தால் $PT' = O$.

$$\therefore\ PT^2 = 2\,AB.\,PN.$$

(அ து) P அவற்றில் ஒரு வட்டத்தின்மேல் இருந்தால் மற்ற வட்டத்துக்கு அதன் வர்க்கம், அச்சிலிருந்து அதன் தூரத்தைப் பொருத்து நேர் விகிதத்தில் மாறும் என்பது தெரிகிறது.

கிளைத் தேற்றம்

ஒரு வட்டத்துக்கு மற்றொரு வட்டத்தின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளியின் வர்க்க அந்த வட்டங்களின் அச்சிலிருந்து அப்புள்ளியின் குத்துத் தூரத்துடன் நேர் விகிதத்தில் இருக்கும்.



படம் 12

P_1 வட்டம் (O) யின் மேல் இருக்கிறது.

PT வட்டம் (A)க்குத் தொடு கோடு.

QM வட்டங்களின் அச்சு.

$PN \perp QM$, r_1, r_2 ஆரங்கள்.

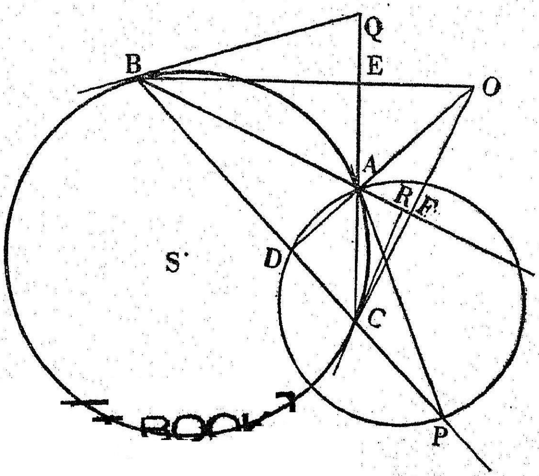
$$PA^2 - r_1^2 = 2\, AB, PN.$$
$$\propto PN.$$
$$PA^2 - r_1^2 = PT^2.$$
$$\therefore \quad PT^2 = 2\, AB\, PN.$$
$$\propto PN.$$

கவனிக்கவும் :

PT^2, PN உடன் நேர் விகிதத்திலுள்ளது PT அல்ல.

மாதிரிகள்

1. $\triangle ABC$யில் சுற்று வட்டத்திற்கு A, B, C வழியே வரையப்பட்ட தொடு கோடுகள், BC, CA, AB யை P, Q, R இல் வெட்டுகின்றன. AP, BQ, CRஐ விட்டங்களாகவுடைய வட்டங்களுக்கு முக்கோணத்தின் குத்துச் சந்தியின் வர்க்கங்கள் சமம் என நிரூபிக்கவும்.



கொள்கை : (1) AP, BQ, CR, வட்டம் ABC க்கு A, B, C வழியே வரையப்பட்ட தொடுகோடுகள்

(2) AP, BQ, CR விட்டங்களாகவுடைய வட்டங்கள் தரப்பட்டுள்ளன.

நிருபிக்க : முக்கோணத்தின் குத்துச் சந்தி O என்போம். AP, BQ, CR விட்டங்களாகவுடைய வட்டங்களுக்கு O வின் வர்க்கங்கள் சமம் என.

நிருபணம் : AP யை விட்டமாகவுள்ள வட்டம் BC யை Dயில் வெட்டட்டும்.

$\angle ADP$ அரை வட்டத்திலுள்ளதால் $\angle ADP = 90°$.

$\therefore$ AD, BC க்குக் குத்துக் கோடு.

A, D ட்டத்திலுள்ள புள்ளிகள்.

$\therefore$ வட்டத்தில் AD என்னும் நாணில் O ஒரு புள்ளி.

$\therefore$ O வின் வர்க்கம் $OA \cdot OD$ ஆகும்.

இது மாதிரியே மற்ற வட்டங்களும் CA, AB யை E, F இல் வெட்ட,

BE, CF முக்கோணத்தின் குத்துக் கோடுகள் என்றும் $OB \cdot OE$, $OC \cdot OF$ ⊙ வின் வர்க்கங்கள் என்றும் நிருபிக்கலாம்.

O, குத்துச் சந்தியாகையால்,

$OA . OD = OB . OE = OC . OF$. (கீழே கண்டபடி)

$\therefore$ மூன்று வட்டங்களுக்கும் O வின் வர்க்கம் சமம்)

($\triangle ABC$ யில் AD, BE குத்துக் கோடுகள்.

$\therefore$ $ABDE$ வட்ட நாற்கரம்.

நாண்கள் BE, AD, O வில் வெட்டுகின்றன.

$\therefore$ $AO . OD = BO . OE$

இதுபோலவே $BO \cdot OE = CO . OF$)

பயிற்சி-17 (a)

1. மூன்று வட்டங்களின் மையங்கள் ஒரே நேர்கோடுகள் இல்லையென்றால், அவற்றைக் குத்தாக வெட்டும் வட்டம்ஒன்று உண்டு. மேலும் ஒன்றுதான் உண்டு எனக் காட்டுக.

2. $\triangle ABC$ யில் AB, BC, CA இவற்றை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டங்களுக்கு அச்சுச் சந்தி முக்கோணத்தின் குத்து மையம் எனக் காட்டுக.

3. $\triangle ABC$ யில் I_1, I_2, I_3 வெளி வட்ட மையங்கள். $I_1 I_2$, $I_2 I_3$, $I_3 I_1$ விட்டங்களாகவுடைய வட்டங்களுக்கு அச்சுச் சந்தி உள்வட்ட மையம் எனக் காட்டுக.

4. ஒன்றையொன்று வெட்டாத 3 வட்டங்கள் கொடுத்தால் அவற்றின் அச்சுச் சந்தி கண்டுபிடிப்பதெப்படி என்று எழுதி நிரூபணம் தருக.

5. வட்டம் (O_1), வட்டம் (O_2) A, B யில் வெட்டுகின்றன. வட்டம் (O_3) இவற்றை வெட்டவில்லை. இவற்றின் அச்சுச் சந்தி கண்டு பிடியுங்கள்.

பயிற்சி–17 (b)

1. $\triangle ABC$ யில் AD, BE, CF குத்துக் கோடுகள்; O குத்து மையம். $\odot CDE$, $\odot AEF$, $\odot BDF$ இவற்றின் அச்சுச் சந்தி O என நிரூபிக்க.

2. $\triangle ABC$ யில் A_1, B_1, C_1, பக்கங்கள் BC, CA, AB யில் ஏதாவது புள்ளிகள். AA_1, BB_1, CC_1 விட்டங்களாகவுடைய வட்டங்களின் அச்சுச் சந்தி முக்கோணத்தின் குத்து மையம் என நிரூபிக்கவும்.

3. ஒரு வட்டத்தின் தன்னிசை முக்கோணத்தின் பக்கங்களை விட்டங்களாகவுடைய வட்டங்களின் அச்சுச் சந்தி அந்த வட்டத்தின் மையம் என நிரூபிக்கவும்.

4. $\triangle ABC$ யில், சுற்று வட்டத்துக்கு A யில் தொடு கோடு BC யை P யில் வெட்டுகிறது. அதே மாதிரி B, C யில் தொடு கோடுகள், CA, AB யை Q. R இல் வெட்டுகின்றன. AP, BQ, CR இவற்றை விட்டங்களாகக் கொண்ட விட்டங்களுக்கு சுற்று வட்டமையத்து வர்க்கங்கள் சமம் என நிரூபிக்கவும்.

5. $\triangle ABC$ யில் உள்வட்டம் பக்கங்கள் BC, CA, AB யை X, Y, Z இல் தொடுகிறது. BX, CY, AZ இவை விட்டங்களாகக் கொண்ட வட்டங்களுக்கு I அச்சுச் சந்தி என நிரூபிக்கவும்.

குறிப்பு: இதிலிருந்து மாதிரியையும் உபயோகப் படுத்தி இந்த மூன்று வட்டங்களுக்கும் SO பொது அச்சு என்று நிரூபிக்கவும்.

(S — சுற்று வட்ட மையம்
O — குத்து மையம்)

ஓரச்சு வட்டங்கள் (Coaxal circles)

வரையறை:

பல வட்டங்களை இரண்டிரண்டாக எடுக்க அவற்றின் சமத் தொடு கோட்டச்சுகள் ஒரே நேர்கோடானால் அந்த வட்டங்கள் ஓரச்சு வட்டங்கள் எனப்படும்.

$A_1, A_2, A_3, \ldots$ முதலிய மையங்களையும் $r_1, r_2, r_3, \ldots$ முதலிய ஆரங்களையும் கொண்ட வட்டங்களுக்கும் பொது அச்சு ஒன்று இருப்பின் அவை ஓரச்சு வட்டங்களாகும். பொது அச்சில் P ஒரு புள்ளியாயின், இந்த வட்டங்களுக்கு அதன் வர்க்கங்கள் சமம்.

$$\therefore \quad PA_1^2 - r_1^2 = PA_2^2 - r_2^2 = PA_3^2 - r_3^2 = k^2$$

என்போம்.

$$\therefore \quad r_1^2 = k^2 - PA_1^2.$$

ஓரச்சு வட்டங்களுக்கு ஒரு பொது அச்சு உண்டு.

∴ வட்ட மையங்கள் அச்சுக்குச் செங்குத்தான ஒரு நேர்கோட்டில் அமையும்.

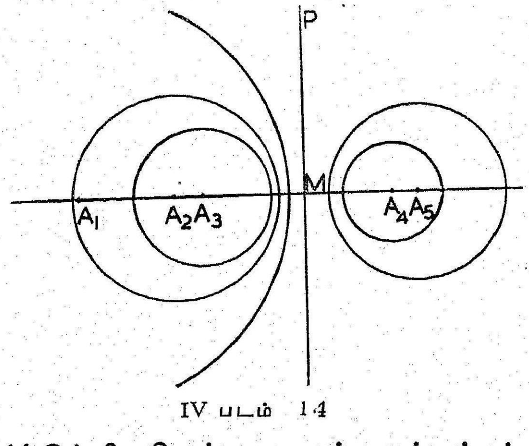
∴ வட்ட மையங்கள் நேர்கோட்டில் A_1 என்ற ஏதாவது ஒரு புள்ளியை மையமாகக் காண்டால், $k^2 - PA_1^2$ தெரியும்.

∴ r_1 கண்டு பிடிக்கலாம்.

∴ A_1 ஐ மையமாகக் கொண்ட ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியைச் சேர்ந்த ஒரு விட்டம் வரையலாம்.

இப்படி பல மையங்களை அந்த நேர்கோட்டில் எடுத்துப் பல ஓரச்சு வட்டங்கள் வரையலாம்.

∴ ஒரு ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியில் எண்ணற்ற வட்டங்கள் உண்டு.



IV படம் 14

படம்–14 இல் சில வெட்டாத ஓரச்சு வட்டங்கள்.

இதிலிருந்து கீழ்க்கண்டவை தெளிவாகின்றன.

1. ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியிலுள்ள வட்டங்களின் மையங்கள் அச்சுக்குச் செங்குத்தான ஒரு நேர்கோட்டில் அமையும்.

2. வெட்டாத ஓரச்சு வட்டங்கள் படத்தில் கண்ட மாதிரி அச்சின் இரு பக்கங்களிலும் அமையும்.

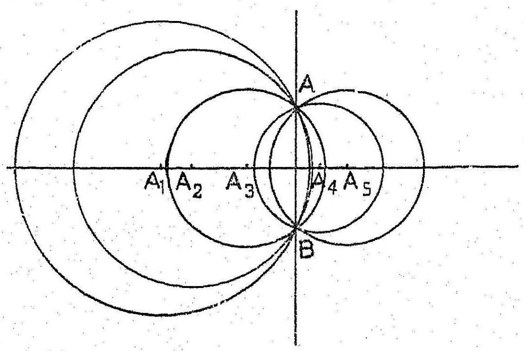
3. இரண்டு விட்டங்கள் வெட்டிக் கொண்டால், பொது நாண் வட்டங்களின் பொது அச்சு ஆகும். ஓரச்சு வட்டங்களுக்குப் பொதுவான ஒரே அச்சு உண்டு.

∴ இரண்டு வட்டங்களின் பொது நாண் அந்த வட்டத் தொகுதியிலுள்ள எல்லா வட்டங்களுக்கும் பொது அச்சு ஆகும். மேலும் வட்டங்களின் வெட்டுப் புள்ளிகளின் வர்க்கங்கள் இரண்டு வட்டங்களுக்கும் பூஜ்யம்.

∴ அந்தப் புள்ளிகளின் வர்க்கங்கள் எல்லா வட்டங்களுக்கும் பூஜ்யம்.

∴ ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியிலுள்ள எல்லாவட்டங்களும் முதலிரண்டு வட்டங்களை அதே புள்ளிகளில் வெட்டும்.

இந்த வட்டங்கள் வெட்டும் ஓரச்சு வட்டத் தொகுதி (intersecting system of coaxal circles) எனப்படும்.



IV படம் 15

படம் - 15 இல் வெட்டும் ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியைக் காணலாம்.

4. P, அச்சில் ஒரு புள்ளியானல் அதிலிருந்து வ களுக்கு வரையப்படும் தொடு கோடுகள் சமம்.

PT தொடு கோடு என்றல், $PT_1^2 = PA_1^2 - r_1^2$

$= P$ யின் வர்க்

$\therefore \; PT_1^2 = PT_2^2 = PT_3^2 = \ldots$

5. ஆகவே Pயை மையமாகவும், PT ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டம் ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியிலுள்ள எல்லா வட்டங்களையும் குத்தாக வெட்டும்.

6. ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியின் பொது அச்சு, வட்ட மையங்கள் நேர்கோட்டை O வில் சந்தித்தால் வட்டங்களுக்கு O வின் வர்க்கம் l^2 என்றால்,

$$OA_1^2 - r_1^2 = OA_2^2 - r_2^2 = OA_3^2 - r_3^2 = \dots = l^2.$$

∴ Oவிலிருந்து வட்டத் தொகுதியிலுள்ள எல்லா வட்டங்களுக்கும் வரையும் தொடு கோடுகளின் நீளம் l ஆகும்.

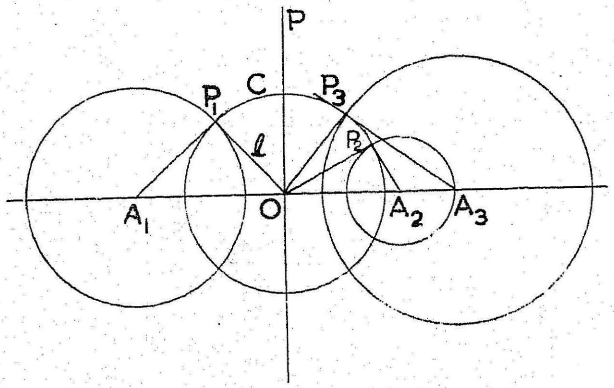
∴ O மையமாகவும் l ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டம் வட்டத் தொகுதியிலுள்ள எல்லா வட்டங்களையும் குத்தாக வெட்டுகிறது.

7. இதிலிருந்து ஓரச்சு வட்டத்தொகுதி ஒன்று வரைந்திட ஒரு முறை கிடைக்கிறது.

ஓரச்சு வட்டங்கள் வரையும் முறை :

(1) வெட்டும் ஓரச்சு வட்டங்கள் வரைய இரண்டு புள்ளிகள் வழி எல்லா வட்டங்களையும் வரைய வேண்டும்.

வெட்டாத ஓரச்சு வட்டத் தொகுதி வரைய



IV படம் 16

வட்டம் (A_1), வட்டம் (A_2) கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது. P அவற்றின் அச்சை வரைக. O அச்சடியாகட்டும். O விலிருந்து வட்டம் (A_1)க்குத் தொடு கோடு வரைக. அதன் நீளம் l என்போம்.

O வை மையமாகவும் l ஆரமாகவும் கொண்டு ஒரு வட்டம் வரைக.

அது வட்டம் (A_1) ஐக் குத்தாக வெட்டுகிறது.

மேலும் அதன் மையம் அச்சில் இருக்கிறது.

∴ அது எல்லா வட்டங்களையும் குத்தாக வெட்டும். இந்த வட்டத்தின் மேல் P_3 என்னும் ஏதாவது ஒரு புள்ளி எடுத்து அதில் தொடு கோடு வரைக.

அத்தொடு கோடு $A_1 A_2$ ஐ A_3 இல் வெட்டட்டும்.

A_3 மையமாகவும் $A_3 P_3$ ஆரமாகவும் உள்ள வட்டம் வட்டம் (O) வைக் குத்தாக வெட்டுகிறது.

மேலும் அதன் மையம் $A_1 A_2$ இல் இருக்கிறது.

∴ அது ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியிலுள்ள ஒரு வட்டம்.

வட்டம் (O) வின்மேல் எண்ணற்ற புள்ளிகள் இருப்பதால் ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியில் எண்ணற்ற வட்டங்கள் உண்டு.

(8) மூன்று வட்டங்களைக் குத்தாக வெட்டும் வட்டங்கள் இரண்டு உண்டானால் அவை ஓரச்சு வட்டங்கள்.

மூன்று வட்டங்களை இரண்டிரண்டாக எடுக்க அவற்றின் அச்சுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும். (தேற்றம் 34)

மேலும் 3 நேர்கோடுகள் இரண்டு புள்ளிகளில் சந்திக்குமானால், அவை ஒன்றோடொன்று முழுவதும் பொருந்தும்.

∴ 3 வட்டங்களையும் குத்தாக வெட்டும் ஒரு வட்டம் இருந்தால் அதன் மையம் அச்சுச் சந்தியாகும்.

ஆனால் 3 வட்டங்களையும் குத்தாக வெட்டும் இரண்டு வட்டங்கள் உண்டானால் அவற்றின் மூன்று அச்சுகளும் இரண்டுப் புள்ளிகளும் சந்திக்கும்.

∴ 3 அச்சுகளும் ஒன்றாய் பொருந்தும்.

∴ இரண்டு வட்டங்கள் குத்தாக வெட்டினால், 3 கோடுகளும் ஒன்றாகப் பொருந்தும்.

(அ–து) அவை ஓரச்சு வட்டங்கள்.

9. மையங்கள் ஒரே நேர்கோட்டில் அமைந்த மூன்று வட்டங்களையும் குத்தாக வெட்டும் வட்ட மையங்களைச் சேர்க்கும் கோடு.

மூன்று வட்டங்களின் அச்சுகள் இரண்டிரண்டாகக் கொள்ள இணைக்கோடுகளானால், இவை எட்டாப்புள்ளியில் சந்திக்கும். அப்பொழுது இவற்றைக் குத்தாக வெட்டும் வட்டத்தின் மையம் எட்டாப் புள்ளியாகும்.

10. ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியை O மையமாகவும் l ஆரமாகவும் உள்ள வட்டம் குத்தாக வெட்டுகிறது என்று பார்த்தோம்.

$$\therefore l^2 = OA_1^2 - r_1^2$$

(1) $\therefore OA_1 > r_1$ ஆனால்,

$$l^2 > O.$$

($\therefore$ l உண்மை அளவு)

(அ–து) O, வட்டத்துக்கு வெளியே இருந்தால், அல்லது வட்டங்கள் வெட்டிக் கொள்ளவில்லை யென்றால், l க்கு உண்மையான மதிப்பு உண்டு.

(2) $OA_1 = r_1$ ஆனால்

$$l = O.$$

அப்பொழுது வட்டங்கள் தொடு வட்டங்களாகும். எல்லா வட்டங்களும் ஒன்றையொன்று O வில் தொடும்.

(3) $OA_1 < r$ ஆனால்

$$l^2 < O.$$

$\therefore$ l க்கு உண்மையான மதிப்பு கிடையாது.

அது கற்பனை எண் ஆகும்.

அப்பொழுது O வை மையமாகக் கொண்டு எல்லா வட்டங்களையும் குத்தாக வெட்டும் வட்டம் வரைய முடியாது.

வட்டங்கள் வெட்டும் வட்டங்கள் ஆகும்.

எல்லைப் புள்ளிகள் (Limiting Points)

மேலே 8 வது குறிப்பில் காட்டியபடி, O மையமாகவும் l ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டம், (அதை C என்போம்) A_1 A_2 ஐ L_1, L_2 இல் வெட்டினால், L_1 L_2 இல் அந்த வட்டத்துக்கு வரையப்படும் தொடு கோடுகளின் நீளங்கள் பூஜ்யமாகும். மேலும் வட்டமையங்களும் L_1, L_2 வுடன் பொருந்தும். ஆகவே L_1, L_2 என்னும் புள்ளிகளில் வரையப்படும் ஓரச்சு வட்டங்களின் ஆரங்கள் பூஜ்யமாகும். அவற்றைப் புள்ளி வட்டங்கள் எனலாம்.

$\therefore$ L_1, L_2 என்றும் இரண்டு புள்ளி வட்டங்களும் இந்த ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியைச் சேர்ந்தவை.

மேலும் $L_1 L_2$ க்கு இடையே வேறு எந்த வட்டத்தின் மையமும் இருக்க முடியாது, ஏனென்றால் அதிலிருந்து வட்டம் C க்குத் தொடுகோடு வரைய முடியாது.

$$OA_1^2 - l^2 = r_1^2.$$

$$OA_1 < l \text{ என்றால்}$$

$$r_1^2 < O.$$

ஆகவே L_1, L_2 என்றும் புள்ளி வட்டங்கள் எல்லைப் புள்ளிகள் (Limiting Points) எனப்படும்.

வரையறை

எல்லைப் புள்ளிகள் (Limiting Points)

ஓரச்சு வட்டத்தொகுதியிலுள்ள இரண்டு புள்ளி வட்டங்களும் எல்லைப் புள்ளிகள் எனப்படும்.

குறிப்பு

(1) வட்டம் C, $A_1 A_2$ ஐ L_1, L_2 வில் வெட்டுவதால் $OL_1 = OL_2 = l$.

(2) O விலிருந்து ஓரச்சு வட்டங்களுக்கு வரையப்பட்ட தொடுகோடுகளின் நீளம் OL_1 அல்லது OL_2 ஆகும்.

(3) $L_1 L_2$ வை விட்டமாகவுடைய வட்டம், (வட்டம் C.) ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியில் உள்ள எல்லா வட்டங்களையும் குத்தாக வெட்டும்.

(4) ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியின் பொது அச்சு $L_1 L_2$ இன் மையக் குத்துக் கோடு ஆகும்.

(5) வட்டங்களின் பொது அச்சில் P ஒரு புள்ளியானால் P யிலிருந்து எல்லா வட்டங்களுக்கும் வரையப்படும் தொடு கோடுகள் PL_1 அல்லது PL_2 க்குச் சமம்.

P யிலிருந்து எல்லா வட்டங்களுக்கும் வரையப்படும் தொடுகோடுகள் சமம். L_1, L_2 இரண்டு புள்ளி வட்டங்கள்.

$\therefore$ P யிலிருந்து L_1, L_2 க்கு வரையப்படும் தொடு கோடுகள் PL_1, PL_2.

$\therefore PT = PL_1 = PL_2$

(6) ஓரச்சு வட்டங்களைக் குத்தாக வெட்டும் எந்த வட்டமும் L_1, L_2 வழிச் செல்லும்.

எல்லா வட்டங்களையும் குத்தாக வெட்டும் வட்டத்தின் மையம் பொது அச்சில் இருக்கும். அதன் ஆரம் மையத்

திலிருந்து வட்டங்களுக்கு வரையப்படும் தொடு கோட்டின் நீளம். PT என்றால் $PT = PL_1 = PL_2$.

∴ அந்த வட்டம் L_1, L_2 வழிச் செல்லும்.

(7) ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியிலுள்ள மையப் புள்ளிகள் கோட்டிலுள்ள எந்த வட்டத்தின் விட்டத்தையும் L_1, L_2 இசையாகப் பிரிக்கும்.

வட்டத்தின் விட்டம் AB என்போம்.

$L_1 L_2$ ஐ விட்டமாகவுடைய வட்டம் இதைக் குத்தாக வெட்டுகிறது.

$$\therefore (AB, L_1 L_2) = -1.$$

அல்லது

O அச்சடி என்றால், $OL_1 = l$. (வட்டங்களுக்கு வரையப் படும் தொடுகோடு) என்று பார்த்தோம்.

$$\therefore OL_1^2 = l^2$$
$$= OA \cdot OB.$$
$$\therefore (L_1 L_2, AB) = -1.$$

(8) $OA_1^2 - r_1^2 = l^2$; $OL_1 = OL_2 = l$.

(1) $\therefore OA_1 > r_1$ ஆனால் $l^2 > O$.

∴ வட்டங்கள் வெட்டாத ஓரச்சு வட்டத் தொகுதி யானால் எல்லைப்புள்ளிகள் உண்மைப் புள்ளிகள் ஆகும்.

(2) $OA_1 = r_1$ என்றால் $l^2 = O$.

∴ வட்டங்கள் O வில் தொட்டுக் கொண்டால் எல்லைப் புள்ளிகள் தொடு புள்ளியுடன் பொருந்தும்.

(3) $OA_1 < r_1$ என்றால் $l_2 < O$

∴ வட்டங்கள் வெட்டிக் கொள்ளும் போது எல்லைப் புள்ளிகள் கற்பனைப் புள்ளிகள் ஆகும்.

(9) இரண்டு வட்டங்கள் பொதுமைய வட்டங்களானால் அச்சு எட்டாப் புள்ளியாகும்.

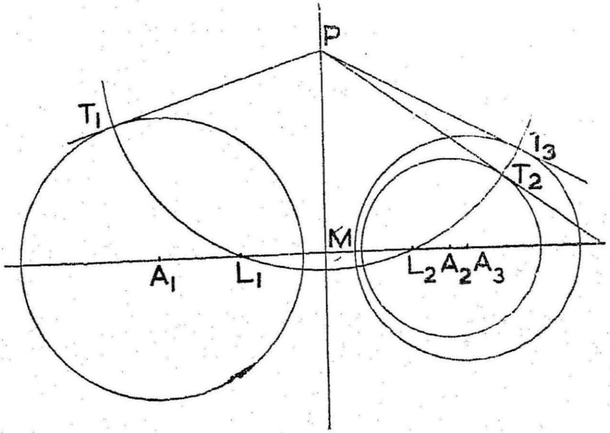
∴ L_1 வட்டங்களின் மையத்துடன் பொருந்தும்.

L_2 எட்டாப் புள்ளியாகும்.

தேற்றம் 36

ஒரு வட்டம் ஓரச் வட்டத் தொகுதியிலுள்ள இரண்டு வட்டங்களைக் குத்தாக வெட்டினால் அது அந்தத் தொகுதி

யிலுள்ள ஒவ்வொரு வட்டத்தையும் குத்தாக வெட்டுவதுடன் இரண்டு எல்லைப் புள்ளிகள் வழியும் செல்லும்



IV படம் 17

கொள்கை : (1) ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியில் $\odot$ A_1, $\odot$ (A_2) இரண்டு வட்டங்கள் தரப்பட்டுள்ளன.

(2) L_1, L_2 எல்லைப்புள்ளிகள்.

(3) $\odot$ (A_3) ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியில் ஏதாவது ஒரு வட்டமாக இருக்கட்டும்.

(4) வட்டம் (P), $\odot$ (A_1), $\odot$ (A_2) ஐக் குத்தாக வெட்டுகிறது.

நிருபிக்க : (1) வட்டம் (P), வட்டம் (A_3) ஐயும் குத்தாக வெட்டும் எனவும்

(2) அது L_1, L_2 வழிச் செல்கிறது எனவும்.

நிருபணம் : வட்டம் (P), $\odot$ (A_1) ஐ T_1 இலும், $\odot$ (A_2)ஐ T_2 இலும் வெட்டட்டும். $\odot$ $(P) \perp \odot$ (A_1)

$\therefore$ PT_1, $\odot$ (A_1) க்குத் தொடுகோடு.

அதுபோலவே PT_2, $\odot$ (A_2) க்குத் தொடுகோடு.

ஆனல் PT_1, PT_2, ஒரு வட்ட ஆரங்கள்

$\therefore$ $PT_1 = PT_2$

$\therefore$ P, $\odot$ (A_1), $\odot$ (A_2) இவற்றின் அச்சில் உள்ளது.

$\therefore$ P யிலிருந்து ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியிலுள்ள மற்ற எந்த வட்டத்துக்கும் வரையப்பட்ட தொடுகோடு PT_1க்குச் சமம்.

$\therefore P$ யிலிருந்து வட்டம் (A_3) க்கு PT_3 என்னும் தொடுகோடு வரைந்தால்

$PT_1 = PT_3$

$\therefore$ P யை மையமாகவும் PT_1 ஆரமாகவும் உள்ள வட்டம் (P), T_3 வழியே செல்லும்

$\therefore$ வட்டம் $(P) \perp$ வட்டம் (A_3)

$\therefore$ வட்டம் (P) ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியிலுள்ள எல்லா வட்டங்களையும் குத்தாக வெட்டும்.

L_1, L_2 வை ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியிலுள்ள புள்ளி வட்டங்கள் எனக் கொண்டால் L_1, L_2 வையும் வட்டம் (P) குத்தாக வெட்டும்.

$\therefore$ வட்டம் (P), L_1, L_2 வழிச் செல்லும்.

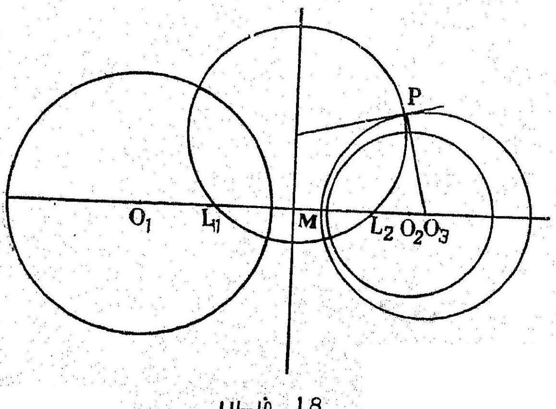
கிளைத்தேற்றம்

ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியின் பொது அச்சில் ஒரு புள்ளியை மையமாகவும் அதிலிருந்து ஏதாவது ஒரு வட்டத்துக்கு வரையப்பட்ட தொடுகோட்டை ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டம் ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியிலுள்ள ஒவ்வொரு வட்டத்தையும் குத்தாக வெட்டும்.

(P என்னும் புள்ளி பொது அச்சில் இருந்தால் PT_1 PT_2 PT_3 வட்டங்களுக்குத் தொடுகோடுகள் வரைந்தால், அந்த வட்டங்களுக்கும் புள்ளியின் வர்க்கங்கள் சமம்.

$\therefore \quad PT_1^2 = PT_2^2 = PT_3^2 = \ldots\ldots\ldots$

$\therefore$ P யை மையமாகவும் PT_1 ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டம் மற்ற வட்டங்களை T_2, T_3, ... என்றும் புள்ளிகளில், குத்தாக வெட்டுகிறது)



படம் 18

2 வட்டங்கள் கொடுத்திருந்தால் அவற்றுடன் ஓரச்சுத் தொகுதியிலுள்ள வட்டம் ஒன்று கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி வழியே வரைய.

கொள்கை : வட்டம் (O_1) வட்டம் (O_2), புள்ளி P கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.

கேட்டிருப்பது : P வழிச் செல்லும் ஓரச்சு வட்டம் வரைய

வரைமுறை : வட்டங்கள் (O_1), (O_2) வின் எல்லைப் புள்ளிகளைக் குறி. அவைகள் $L_1 L_2$ ஆகட்டும். (அச்சடி M ஐ மையமாகக்கொண்டு வட்டங்களைக் குத்தாக வெட்டும் வட்டம் வரைந்தால் அது $O_1 O_2$ வை L_1, L_2 வில் வெட்டும்)

வட்டம் $L_1L_2 P$ வரைக.

அதற்கு P வழியே தொடு கோடு வரைக. அது $O_1 O_2$ வை O_3 யில் வெட்டட்டும். O_3 மையமாகவும், $O_3 P$ யை ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டம் ஓரச்சு வட்டத்தொகுதியைச் சேர்ந்தது.

நிருபணம் : L_1, L_2 வழியாகச் செல்லும் எந்த வட்டத்துக்கும் மையம் அதன் நடுக்குத்துக் கோடாகிய அச்சில் இருக்கிறது.

∴ அந்த வட்டம் ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியிலுள்ள ஒவ்வொரு வட்டத்தையும் குத்தாக வெட்டுகிறது.

∴ வட்டம் PL_1, L_2, P வழிச் செல்லும் ஓரச்சு வட்டத்தைக் குத்தாக வெட்டும்.

PO_3, வட்டம் PL_1, L_2 க்கு தொடுகோடு.

∴ O_3 ஐ மையமாகவும், $O_3 P$ ஐ ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டம், வட்டம் $PL_1 L_2$ ஐக் குத்தாக வெட்டும்.

இதன் மையம் $O_1 O_2$ வில் இருப்பதால் இது ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியைச் சேர்ந்த வட்டமாகும்.

2. இரண்டு வட்டங்களும் A, B யில் வெட்டிக் கொண்டால், PAB என்னும் வட்டம் இவற்றுடன் ஓரச்சுத் தொகுதியில் உள்ளது.

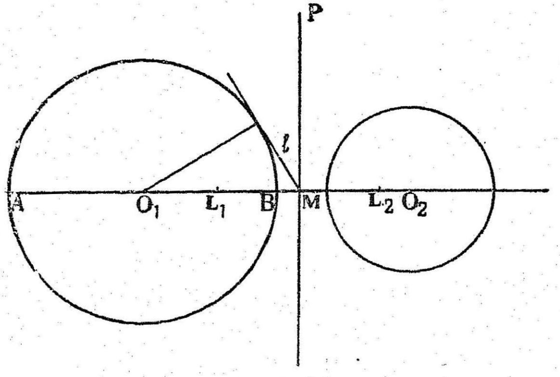
3. இரண்டு வட்டங்களும் தொடு வட்டங்கள் ஆனல், அவற்றை அதே புள்ளியில் தொடும்படி P வழியே ஒரு வட்டம் வரைக. அது ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியைச் சேர்ந்தது.

வரைமுறை :

வட்டங்கள் M இல் தொட்டால், PMஐச் சேர்த்து அதன் நடுக்குத்துக்கோடு வரைக. அது மையங்கள் கோட்டை O_3 இல் வெட்டினால் அதுதான் வட்டமையம்.

தேற்றம் 37

ஓரச்சுவட்டத் தொகுதியிலுள்ள ஒவ்வொரு வட்டத்துக்கும் அதன் எல்லைப் புள்ளிகள் தன்மாற்றுப் புள்ளிகளாகும்.



IV படம் 19

கொள்கை : (1) வட்டங்கள் (O_1), (O_2) ஒரு ஓரச்சுத் தொகுதியைச் சேர்ந்தவை.

(2) $L_1 L_2$ அதன் எல்லைப் புள்ளிகள்.

(3) PM அவற்றின் சமத்தொடுகோட்டச்சு

நிரூபிக்க : $L_1 L_2$ தொகுதியிலுள்ள எல்லா வட்டங்களும் தன் மாற்றுப் புள்ளிகள் என.

நிரூபணம் : வட்டம் (O_1)க்கு M இலிருந்து தொடுகோடு வரைக. அதன் நீளம் l என்போம். வட்டம் (O_1) ஐ O_1O_2 A, B யில் வெட்டட்டும். AB ஒரு விட்டம். M மையமாகவும், l ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டம் (O_1) ஐக் குத்தாக வெட்டுகிறது.
(தேற்றம் 36 கிளை)

$L_1 L_2$ எல்லைப் புள்ளிகள்

$\therefore \quad ML_1 = ML_2 = l.$

(எல்லைப் புள்ளிகள் குறிப்பு-1)

$\therefore L_1 L_2$ ஐ விட்டமாகவுடைய வட்டம், விட்டம் (O_1) ஐக் குத்தாக வெட்டுகிறது.

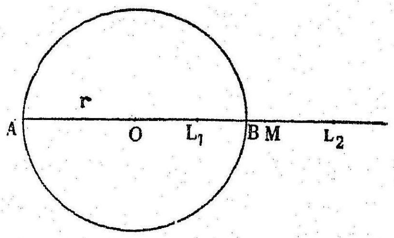
$\therefore \quad (A\,B,\, L_1 L_2) = -1.$ (தேற்றம்-14)

$\therefore \quad O_1 B^2 = O_1 L_1 \;\, O_1 L_2$ (தேற்றம்-3)

$\therefore \quad L_1\, L_2$ வட்டம் (O_1)க்குத் தன் மாற்றுப் புள்ளிகள். அது போலவே இந்த ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியைச் சேர்ந்த எல்லா வட்டங்களுக்கும் L_1, L_2 தன் மாற்றுப் புள்ளிகள் என்று நிரூபிக்கலாம்.

தேற்றம் 38

ஒரு வட்டத் தொகுதியிலுள்ள ஒவ்வொரு வட்டத்துக்கும் இரண்டு குறிப்பிட்ட புள்ளிகள் தன் மாற்றுப் புள்ளிகள் ஆனல் அது ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியாகும்.



IV படம் 20

கொள்கை :

(1) ஒரு வட்டத் தொகுதியில் ⊙ (O) ஒரு வட்டம் அதன் ஆரம் r என்போம்.

(2) L_1, L_2 தொகுதியிலுள்ள ஒவ்வொரு வட்டத்துக்கும் தன் மாற்றுப் புள்ளிகள்.

நிரூபிக்க : வட்டத் தொகுதி ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியென.

நிருபணம் :

$L_1\, L_2$ வட்டத்தை $A_1\, B$ யில் வெட்டட்டும்.

$L_1\, L_2$ இன் நடுப்புள்ளி M என்போம்.

$L_1\, L_2$ தன் மாற்றுப் புள்ளிகள் (கொள்கை)

$\therefore$ அது O வழிச் செல்கிறது.

அதுபோலவே அது வட்டத் தொகுதியிலுள்ள எல்லா வட்டமையங்கள் வழியும் செல்லும்.

(அ—து) வட்ட மையங்கள் ஒரு கோடமை வன

AB, வட்டத்தின் விட்டமாகும்.

$L_1\, L_2$ தன் மாற்றுப் புள்ளிகள்.

$\therefore \quad OL_1 . OL_2 = r_1^2 = OA^2 = OB^2.$

$\therefore \quad (AB, L_1 L_2) = -1$ (தேற்றம் 3)

மேலும் $L_1 L_2$ இன் நடுப்புள்ளி M.

$\therefore \quad ML_1^2 = MA . MB.$

(அ-து) வட்டம் (O) க்கு M இன் வர்க்கம் $= ML_1^2$.

இதுபோலவே தொகுதியிலுள்ள எல்லா வட்டங்களுக்கும் M இன் வர்க்கம் ML_1^2 என நிரூபிக்கலாம்.

$\therefore$ (1) வட்டங்களின் மையங்கள் நேர்கோடமை வன.

(2) M என்னும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து அவற்றின் வர்க்கங்கள் சமம்.

$\therefore$ வட்டத் தொகுதி ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியாகும்.

குறிப்பு : இவற்றின் பொது அச்சு, M வழியே $L_1 L_2$ க்கு வரையப்பட்ட குத்துக் கோடு.

கிளைத் தேற்றங்கள் :

(1) $L_1 L_2$ வழியே செல்லும் எந்த வட்டமும் வட்டத் தொகுதியிலுள்ள ஒவ்வொரு வட்டத்தையும் குத்தாக வெட்டும் (தேற்றம் 16)

(2) $L_1 L_2$ வழிச் செல்லும் எல்லா வட்டங்களும் ஒரு வெட்டும் ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியைச் சேரும்.

(3) கொடுக்கப்பட்ட ஒரு வட்டத் தொகுதியைக் குத்தாக வெட்டும் ஒரு தொகுதியின் அச்சு கொடுக்கப்பட்ட தொகுதியின் மையப் பிணை கோடாகும். (line of centres)

(குத்து வட்டங்கள் எல்லாம் L_1, L_2 வழிச் செல்வதால் அவற்றின் அச்சு பொது நாண் $L_1 L_2$ ஆகும்.)

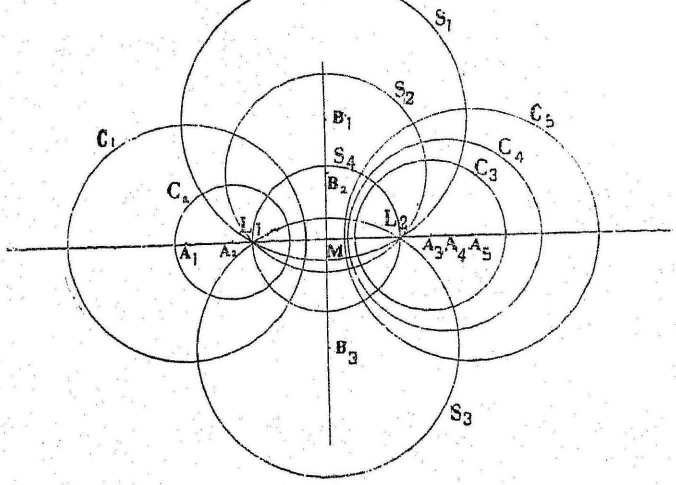
(4) கொடுக்கப்பட்ட ஒரு ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியிலுள்ள ஒவ்வொரு வட்டமும், அவற்றின் எல்லைப் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் வட்டத் தொகுதியிலுள்ள ஒவ்வொரு வட்டத்தையும் குத்தாக வெட்டும். (அவை தன் மாற்றுப் புள்ளிகள்) இதன் மறுதலையும் உண்மை.

(5) வெட்டாத ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியின் குத்து வட்டத் தொகுதி, வெட்டும் ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியாகும்.

(அவை L_1, L_2 வழிச் செல்லும்.)

மறுதலையாக, வெட்டும் ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியின் குத்து வட்டத் தொகுதி, வெட்டாத ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியாகும்.

(அவற்றுக்கு வெட்டும் புள்ளிகள் தன் மாற்றுப் புள்ளிகள், ஆகையால் அவை எல்லைப் புள்ளிகள்.)



IV படம் 21

படம் 21 பார்க்கவும்.

C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 வெட்டாத ஓரச்சு வட்டத் தொகுதி.

S_1, S_2, S_3, S_4 வெட்டும் ஓரச்சு வட்டத் தொகுதி.

A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, S_1, S_2, S_3, S_4 க்கு அச்சு.

அது எல்லைப் புள்ளிகள் L_1, L_2 வழிச் செல்லும்.

$B_1 B_2 B_3 M$ — C_1, C_2, C_3, C_4 க்கு அச்சு.

அது $L_1 L_2$ க்கு மையக் குத்துக்கோடு.

குறிப்பு: ஒவ்வொரு தொகுதியிலும் எண்ணற்ற வட்டங்கள் உண்டு.

ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியை நிர்ணயிப்பதெப்படி?

(1) வட்டங்களுக்கு வர்க்கம் சமமாக உள்ள இரண்டு புள்ளிகள் உண்டானல் அது ஓரச்சு வட்டத் தொகுதி.

(இரண்டு புள்ளிகளும் வட்டங்கள் இரண்டிரண்டாக எடுக்க, ஒவ்வொரு அச்சிலும் உள்ளவை.

∴ அவற்றைச் சேர்க்கும் நேர்கோடு பொது அச்சு)

(2) வட்டங்களுக்கு ஒரு புள்ளியின் வர்க்கங்கள் சமமாக இருந்து, வட்டங்களின் மையங்கள் ஒரு நேர்கோட்டில் இருந்தால் அது ஓரச்சு வட்டத் தொகுதி.

(அந்தப் புள்ளியிலிருந்து வட்ட மையங்களைச் சேர்க்கும் நேர்கோட்டுக்கு வரையப்பட்ட குத்துக் கோடு பொது அச்சு ஆகும்)

(3) வட்டங்கள் ஒரே ஜதை இரண்டு புள்ளிகளில் வெட்டிக்கொண்டால், அவை ஓரச்சு வட்டத் தொகுதி.

(இரண்டு புள்ளிகளையும் இணைக்கும் கோடு பொது அச்சு.)

(4) இரண்டு புள்ளிகள் எல்லா வட்டங்களுக்கும் தன் மாற்றுப் புள்ளிகள் ஆனல் அவை ஓரச்சு விட்டத் தொகுதி.

(தேற்றம் 88)

(5) வட்டத் தொகுதியிலுள்ள ஒவ்வொரு வட்டத்தையும் ஒரு வட்டம் குத்தாக வெட்டினுல், (2) வட்ட மையங்கள் ஒரு கோட்டில் அமைந்தால், அவை ஓரச்சு வட்டத் தொகுதி.

(குத்து வட்டத்தின் மையம் வட்டங்களின் பொது அச்சில் இருக்கும். அதிலிருந்து மையங்கள் கோட்டுக்குக் குத்துக் கோடு வரைந்தால் அது பொது அச்சு)

(6) வட்டத் தொகுதியிலுள்ள ஒவ்வொரு வட்டத்தையும் இரண்டு வட்டங்கள் குத்தாக வெட்டினுல் அவை ஓரச்சு வட்டங்கள்.

(குத்து வட்டங்களின் மையங்களை இணைக்கும் கோடு பொது அசசு ஆகும்)

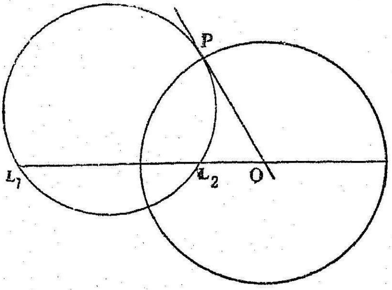
(7) ஒரு வட்டத் தொகுதி, A, B யில் வெட்டினுல், அவற்றைக் குத்தாக வெட்டும் வட்டங்கள் ஓரச்சு வட்டத் தொகுதி.

(8) இரண்டு எல்லைப் புள்ளிகள் கொடுத்திருந்தால் கொடுக்கப்பட்ட ஒரு புள்ளி வழியே செல்லும் ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியைச் சேர்ந்த வட்டம் வரைய.

L_1, L_2, P கொடுத்திருக்க,

P வழியே, L_1 L_2 எல்லைப் புள்ளிகளாக உள்ள ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியைச் சேர்ந்த ஒரு வட்டம் வரைய.

L_1, L_2, P கொடுத்திருக்க P வழியே, L_1, L_2 எல்லைப் புள்ளிகளாக உள்ள ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியைச் சேர்ந்த ஒரு வட்டம் வரைக.



IV படம் 22

வரைமுறை :

வட்டம் $PL_1 L_2$ வரைக

$L_1 L_2$ ஐச் சேர்த்து நீட்டி விடுக.

P யில் வட்டம் $PL_1 L_2$ க்குத் தொடு கோடு வரைக.

அது $L_1 L_2$ ஐ O வில் வெட்டட்டும்.

O மையமாகவும், OP ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டம் வரைக.

அது L_1, L_2 எல்லைப் புள்ளிகளாக உள்ள ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியைச் சேர்ந்தது.

நிரூபணம் :

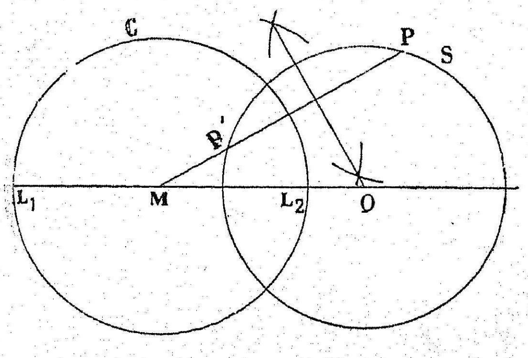
வட்டம் $PL_1 L_2$ க்கு OP தொடு கோடு.

$\therefore \quad OP^2 = OL_1 \, OL_2$.

$\therefore \quad L_1, L_2$ தன் மாற்றுப் புள்ளிகள்.

$\therefore$ வட்டம் (O), ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியைச் சேர்ந்தது.

வேறொரு முறை :



IV படம் 23

L_1, L_2 வின் மையப்புள்ளி M ஐக் குறிக்க.

$L_1 L_2$ ஐ விட்டமாக உள்ள வட்டம் C வரைக. இந்த வட்டத்துக்கு P யின் தன் மாற்றுப் புள்ளி P^1 யைக் கண்டு பிடிக்கவும்.

PP' வழி, $L_1 L_2$ வில் மையமுள்ள வட்டம் S வரைக.

நிருபணம் :

வட்டம் S, P, P' வழிச் செல்கிறது.

வட்டம் C க்கு $P P'$ தன் மாற்றுப் புள்ளிகள்.

$\therefore \quad \odot C \perp \odot S$.

$\odot S$ இன் மையம் $L_1 L_2$ இல் இருக்கிறது.

$\therefore$ அது ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியைச் சேர்ந்தது.

(முறை—5)

குறிப்பு :

இதிலிருந்து ஒரு புள்ளி வழியே ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியில் சேர்ந்த வட்டம் ஒன்றுதான் வரைய முடியும் என்பதும் ஊர்ஜிதமாகிறது மேலும்,

$$OA^2 - r^2 = l^2.$$
$$r = \sqrt{OA^2 - l^2}.$$

இதில் O, l நிலையானவை.

$\therefore$ A தெரிந்தால் r இன் மதிப்பு திட்டமாகத் தெரியும்.

r க்கு பாஸிடிவான ஒரே மதிப்புதான் உண்டு.

$\therefore$ வட்ட மையங்கள் நேர்கோட்டில் ஒரு புள்ளி எடுத்தால் அதை மையமாகக் கொண்டு ஓரச்சு வட்ட்த்தைச் சேர்ந்த ஒரு வட்டம்தான் வரைய முடியும்.

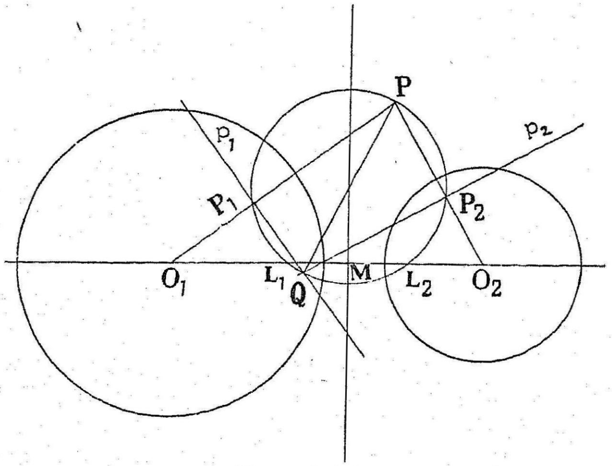
$OA \angle l$ என்றால் வட்டம் வரைய முடியாது.

(அ—து) L_1, L_2 க்கு இடையே உள்ள புள்ளிகளை மையங்களாகக் கொண்டு ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியைச் சேர்ந்த எந்த வட்டமும் கிடையாது.

$\therefore$ ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியிலுள்ள ஒருவட்டம் வரைய, $L_1 L_2$ ம் வட்டத்தின் மையம் அல்லது வட்டத்தின் மேலுள்ள ஏதாவது ஒரு புள்ளியும் கொடுத்தால் போதும்.

தேற்றம் 39

ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியைச் சேர்ந்த வட்டங்களுக்கு ஒரு புள்ளியின் போலார்கள் ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள்.



V படம் 26

கொள்கை :

(1) வட்டம் (O_1), வட்டம் (O_2) ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியைச் சேர்ந்த இரண்டு வட்டங்கள்.

(2) P ஏதாவது ஒரு புள்ளி.

(3) வட்டம் (O_1) க்கு P யின் போலார் p_1 வட்டம் (O_2) க்கு P யின் போலர் p_2.

நிரூபிக்க : p_1, p_2 ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளி வழிச் செல்லும் என

நிரூபணம் : L_1, L_2 வட்டத் தொகுதியின் எல்லைப் புள்ளிகள் என்போம்.

வட்டம் $PL_1 L_2$ வரைக.

Pயின் வழியே இந்த வட்டத்துக்கு விட்டம் PQவையும் வரைக.

Q ஒரு நிலையானபுள்ளி.

⊙ $PL_1 L_2$, $L_1 L_2$ வழிச் செல்வதால் வட்டம் (O_1), வட்டம் $(PL_1 L_2)$ ஐக் குத்தாக வெட்டும்.

P_1, வட்டம் (O_1) க்கு P யின் தன் மாற்றுப் புள்ளி என்போம்.

∴ ⊙ $PL_1 L_2$, P_1 வழிச் செல்லும்.

மேலும் p_1, O_1, P க்கு P_1 வழியே வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோடு. (P_1, P யின் போலார்)

∴ pp_1, Q வழிச் செல்லும்.

அதுபோலவே p_2 உம் Q வழிச் செல்லும் என நிரூபிக்கலாம்.

∴ P யின் போலார்கள் எல்லாம் Q என்னும் ஒரு நிலைத்த புள்ளியில் சந்திக்கின்றன.

குறிப்பு :

(1) ⊙ $PL_1 L_2$ கொடுத்த வட்டங்களைக் குத்தாக வெட்டுவதால் அதன் மையம் சமத்தொடு கோட்டச்சில் உள்ளது.

∴ சமத்தொடு கோட்டச்சு, PQவை இரு சமக் கூறிடுகிறது.

(2) P, Q ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியிலுள்ள ஒவ்வொரு வட்டத்துக்கும் துணையியப் புள்ளிகள் (காஞ்சுகேட் புள்ளிகள்)

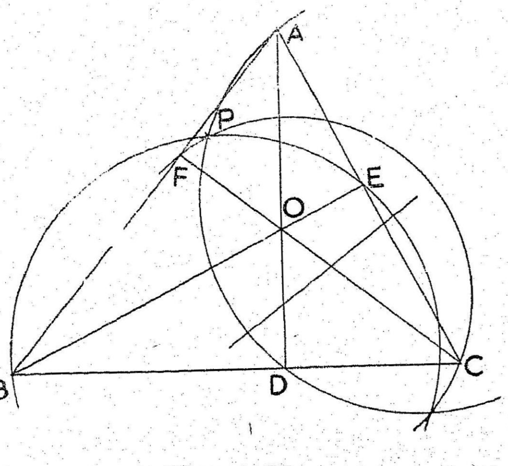
கிளைத் தேற்றம்

ஒரு ஜதைப் புள்ளிகள் ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியைச் சேர்ந்த இரு வட்டங்களுக்குத் துணையியப் புள்ளிகள் என்றால் அவை அந்தத் தொகுதியிலுள்ள ஒவ்வொரு வட்டத்துக்கும் துணையியப் புள்ளிகள்.

(எல்லா வட்டங்களுக்கும் P யின் போலார்கள் Q வழிச் செல்லுகின்றன)

மாதிரிகள்

1. △ ABC யில், AD, BE, CF குத்துக் கோடுகள். P ஏதாவது ஒரு புள்ளி. வட்டங்கள் PAD, PBE, PCF ஓரச்சு வட்டங்கள் என நிரூபிக்கவும்.



IV படம் 25

கொள்கை :

(1) P, $\triangle ABC$ யில் ஏதாவது ஒரு புள்ளி.

(2) AD, BE, CF குத்துக் கோடுகள்.

(3) O குத்துச சந்தி என்போம்.

நிரூபிக்க :

$\odot PAD$, $\odot PCF$, $\odot BPE$ ஓரச்சு வட்டங்கள் என.

நிரூபணம் :

$\odot PAD$, A, D வழிச் செல்கிறது.

அதற்கு O வின் வர்க்கம் $OA.\ OD$.

அதுமாதிரியே, $\odot XBE$, $\odot PCF$ க்கு O வின் வர்க்கங்கள் $OB \cdot OE$, $OC \cdot OF$. ஆனால் $OA\ OD = OB \cdot OE = OC \cdot OF$.

$\therefore$ O விட்டங்களின் 3 அச்சுகளிலும் உள்ளது.

மேலும் P இல் 3 விட்டங்களும் சந்திக்கின்றன.

$\therefore$ P க்கு மூன்று வட்டங்களின் வர்க்கங்களும் பூஜ்யம்.

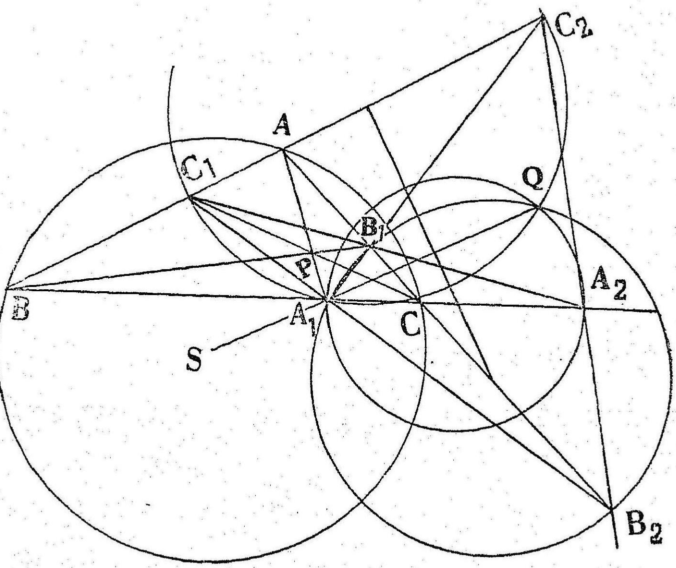
$\therefore$ P உம் வட்டங்களின் அச்சுகளிலும் இருக்கிறது.

$\therefore$ P, O என்னும் இரண்டு புள்ளிகளும் வட்டங்களின் S அச்சுகளிலும் உள்ளன.

$\therefore$ PO பொது அச்சு.

$\therefore$ வட்டங்கள் ஓரசசு வட்டங்கள்.

2. $\triangle ABC$யில் AB_1, B_1, C_1 பக்கங்கள் BC, CA, ABயில் புள்ளிகள் AA_1, BB_1, CC_1 ஒரு புள்ளிவழிக் கோடுகள். $B_1\ C_1$, BCயை A_2 விலும், C_1A_1, CAவை B_2 விலும், A_1B_1, ABயை C_2 விலும் வெட்டுகின்றன, $A_1\ A_2$, $B_1\ B_2$, $C_1\ C_2$ வை விட்டங்களாகக் கொண்ட வட்டங்கள் ஓரச்சு வட்டங்கள் என நிரூபிக்கவும்.



படம் 26

கொள்கை : $\triangle ABC$யில் AA_1, BB_1 CC_1 P வழிச் செல்லும் கோடுகள். A_1B_1, BAஐ C_2 லில் சந்திக்கிறது. B_1C_1, BCஐ A_2வில் சந்திக்கிறது. C_1A_1, CAஐ C_2லில் சந்திக்கிறது.

நிரூபிக்க : A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 விட்டங்களாகக் கொண்ட வட்டங்கள், ஓரச்சு வட்டங்கள் என.

நிருபணம் : AA_1, BB_1, CC_1 ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள் B_1C_1, BCயை A_2லில் சந்திக்கிறது.

∴ A_1, A_2, BCயை ஹார்மோனிக்காகப் பிரிக்கின்றன.

∴ A_1, A_2வை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம், வட்டம் ABCயைக் குத்தாக வெட்டுகிறது.

அதுபோலவே B_1B_2, C_1C_2வை விட்டங்களாக உள்ள வட்டங்களும் வட்டம் ABCயைக் குத்தாக வெட்டுகின்றன என்று நிருபிக்கலாம்.

∴ சுற்றுவட்ட மையம் S, வட்டங்களின் B அச்சுகளிலும் அமையும். மேலும் இந்த மூன்று வட்டங்களும் ஒரு புள்ளியில் வெட்டுகின்றன.

B_1B_2, C_1C_2 விட்டங்களாகவுடைய வட்டங்கள் Q_2வில் வெட்டட்டும்.

$(CA, B_1B_2) = -1.$; $\angle B_1 QB_2 = 90°.$

$\therefore$ QB_1, $\angle AQC$யின் இரு சமவெட்டி.

$$\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{CQ}{QA}.$$

அது போலவே QC_1, $\angle AQB$யின் இரு சமவெட்டி.

$$\therefore \quad \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AQ}{BQ}.$$

இவை இரண்டையும் பெருக்க,

$$\frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{CQ}{BQ}.$$

இன்னும் AA_1, BB_1, CC_1 ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள்.

$$\therefore \quad \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1C} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1.$$

$$\therefore \quad \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{A_1C}{BA_1} = \frac{CA_1}{BA_1}.$$

$$\therefore \quad \frac{CA_1}{BA_1} = \frac{CQ}{BQ}.$$

$\therefore$ QA_1, $\angle BQC$ இன் இரு சமவெட்டி. ஆனால் $(BC, A_1 A_2) = -1$.

$\therefore$ $Q(BC, A_1 A_2) = -1.$

$\therefore$ QA_2, $\angle BQC$க்கு வெளிப்புற இரு சமவெட்டி.

$\therefore$ $A_1 QA_2 = 90°.$

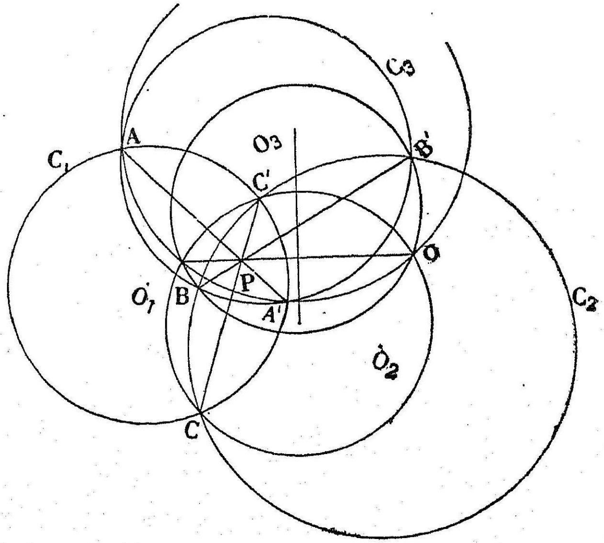
$\therefore$ Q, $A_1 A_2$ வை விட்டமாக வுடைய வட்டத்தில் இருக்கிறது.

$\therefore$ 3 வட்டங்களும் ஓரச்சு வட்டங்கள்

$\therefore$ 3 வட்டங்களும் Q வழிச் செல்லுகின்றன.

$\therefore$ SQ வட்டங்களுக்கும் பொது அச்சு.

3. மூன்று வட்டங்கள் A, A'; B, B'; C, C' இல்வெட்டுகின்றன. O ஏதாவது ஒரு புள்ளி. வட்டங்கள் OAA', OBB', OCC' ஓரச்சு வட்டங்கள் என நிரூபிக்கவும்.



IV படம் 27

கொள்கை : (1) C_1, C_2, C_3 மூன்று வட்டங்கள் A, A'; B, B', C, C' இல் வெட்டுகின்றன.

(2) O ஏதாவது ஒரு புள்ளி.

(3) வட்டம் OAA', வட்டம் OBB', வட்டம் OCC', தரப்பட்டுள்ளன.

நிருபிக்க : வட்டம் OAA', வட்டம் OBB', வட்டம் OCC' ஓரச்சு வட்டங்கள் என.

நிருபணம் : AA', BB', CC' ஐச் சேர். இவை வட்டங்களின் அச்சுகள்.

∴ அவை ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும். அதை P என்போம்.

∴ $PA \cdot PA' = PB \cdot PB' = PC \cdot PC'$ —(1)

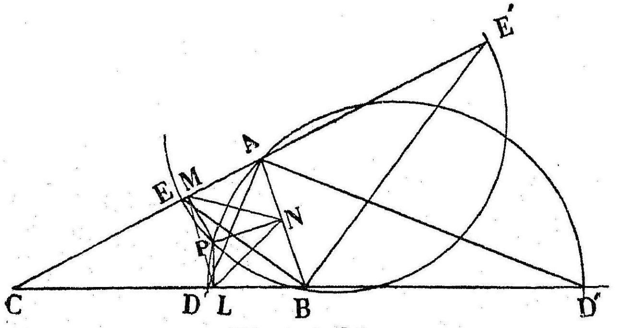
வட்டங்கள் OAA', OBB', OCC', Oவில் சந்திக்கின்றன.

∴ Oவின் வர்க்கங்கள் ஷ வட்டங்களுக்கு பூஜ்யம். ∴ சமம். ஷ வட்டங்கள் A_1A_1; B, B; C, C' வழிச் செல்வதால் வட்டங்களுக்கு Pயின் வர்க்கங்கள் சமம். (1) இன்படி.

∴ OP இவற்றின் பொது அச்சு.

∴ அவை ஓரச்சு வட்டங்கள்.

4. $\triangle ABC$யில் கோணங்கள் A, B, Cயின் இருசம வெட்டிகள். BC, CA, ABயை D, D', E, E'; F, F' இல் சந்திக்கின்றன. DD', EE', FF'ஐ விட்டங்களாகக் கொண்ட வட்டங்கள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றன என்றும், அந்தப்புள்ளி P ஆனல் PL, PR, PN முறையே BC, CA, AB இரு வரையப்பட்ட குத்துக்கோடுகள் ஆனல், $\triangle LMN$ சம புஜ முக்கோணம் எனக் காட்டுக.



IV படம் 28

கொள்கை : (1) $\triangle ABC$யில், AD' AD', $\angle A$யின் இருசம வெட்டிகள். BE, BE', $\angle S$யின் இருசம வெட்டிகள். CF, CF', $\angle C$யின் இருசம வெட்டிகள்.

நிரூபிக்க : (1) DD', EE', FF'ஐ விட்டங்களாகவுடைய வட்டங்கள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றன. எனவும்.

(2) அப்புள்ளி P என்ருல் $PL \perp BC$, $PM \perp CA$, $PN \perp AB$ வரைந்தால் $\angle M = MN = NL$ எனவும்.

நிருபணம் : 1. மாதிரி 2 போல DD^1, EE', FF' ஐ விட்டங்களாகவுடைய வட்டங்கள் ஓரச்சு வட்டங்கள் (Coaxal arcles) என்று நிருபிக்கவும்.

∴ அவை இரண்டு புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன.

அவற்றில் ஒரு புள்ளி P ஆகட்டும். P, அரை வட்டம் DD' இன் மேல் உள்ளதால் PD, PD' $\angle BPC$யின் இரு சம வெட்டிகள்.

$$\therefore \frac{BP}{PC} = \frac{BD}{DC}.$$

∴ AD, $\angle A$யின் இருசமவெட்டி.

$\therefore \quad \frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$

$\therefore \quad \frac{BP}{PC}=\frac{AB}{AC}=\frac{b}{c}.$

$\therefore \quad b\ BP=c\cdot PC.$

அதுபோலவே, $\triangle CPA$ எடுத்து $a\ PA=c\cdot PC$ என நிரூபிக்கலாம்.

$\therefore \quad a\ PA=b\ PB=c\ PC.$

நாற்கரம் $PLCM$ இல்,

$\angle PLC=\angle Prc=90.$ (கொள்கை)

$\therefore$ $PLCM$, வட்டநாற்கரம்.

$\therefore \quad \triangle PLM$ இல் $\frac{LM}{sin\ LPM}=2$ ஆரம் $=PC.$

ஆனல் $\angle LPM=180°-LC.$

$\therefore \quad sin\ LPM=sin\ C.$

$\therefore \quad LM=PC\ sin\ C.$

$=\frac{PC\cdot C}{2R.}$ ($R-$ சுற்று வட்ட ஆரம்)

அதுபோல, $MN=\frac{PB\ .\ b}{2R}.$

$NL=\frac{PA\ .\ a}{2R}.$

ஆனல் $a-PA=l\cdot P, B=c\cdot PC$ (நிரூபித்தபடி)

$\therefore \quad LM=MN=NL.$

பயிற்சி 18 (a)

1. $\triangle ABC$யில் AB, AC விட்டங்களாகவுடைய வட்டங்களுக்கும் BO, CO வை விட்டங்களாகவுடைய வட்டங்களுக்கும், AD சமத்தொடு கோட்டச்சு என நிரூபிக்கவும். (AD குத்துக்கோடு, O குத்துச் சந்தி). இந்த 4 வட்டங்களும் ஒரு ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியைச் சேர்ந்தவையா ? காரணங் கூறுக.

2. இரண்டு வட்டங்கள் (O_1), (O_2) A, B இல் வெட்டுகின்றன. வட்டங்கள் (O_2), (O_3) B, G இல் வெட்டுகின்றன. (O_1), (O_2), (O_3) வட்டங்கள் ஓரச்சு வட்டங்களா ? காரணங் கூறுக.

3. வட்டங்கள் (O_1), (O_2), (O_3) Aயில் வெட்டுகின்றன Aயை மையமாகவுள்ள ஒரு வட்டம் இவை மூன்றையும் குத்தாக வெட்டுகிறது. வட்டங்கள் (O_1), (O_2), (O_3) ஓரச்சு வட்டங்களா ? காரணம் கூறுக.

4. வட்டங்கள் (O_1), (O_2), (O_3) க்கு P யிலிருந்து வரையப் பட்ட தொடுகோடுகள் சமம். அவை A என்னும் ஒரு புள்ளியில் வெட்டுகின்றன. அவை ஓரச்சு வட்டங்களா? காரணம் கூறுக.

5. A_1, A_2, A_3 என்னும் வட்டமையங்கள் ஒரு கோடமைவன. P என்னும் புள்ளியிலிருந்து வட்டங்களுக்கு வரையப் பட்ட PT_1, PT_2, PT_3 என்னும் தொடுகோடுகள் சமம. இந்த 3 வட்டங்களும் ஓரச்சு வட்டங்களா? காரணம் கூறுக.

6. இரண்டு வட்டங்களின் பொதுத்தொடு கோடுகளை விட்டங்களாகக் கொண்ட 4 வட்டங்கள் வரையப்படுகின்றன.

கீழ்க்கண்டவற்றை நிருபிக்கவும் :

(1) இந்த வட்டங்கள் கொடுக்கப்பட்ட வட்டங்களைக் குத்தாக வெட்டுகின்றன.

(2) இவை இரண்டு எல்லைப் புள்ளிகள் வழிச் செல்கின்றன.

(3) அவை வேருெரு ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியைச் சேர்ந்தவை

7. ஒருவட்டம் மூன்று வட்டங்களைக் குத்தாக வெட்டினுல் அவை மூன்றும் ஓரச்சு வட்டங்கள் ஆகுமா? வேறு என்ன நிபந்தனைகள் சரியாக வேண்டும்?

8. வட்டம் (O) க்கு P யிலிருந்து PA, PB என்னும் தொடு கோடுகள் வரையப்பட்டிருக்கின்றன. PA, PB யின் நடுப் புள்ளிகள் C, D புள்ளி வட்டம் P க்கும், வட்டம் (O) க்கும் அச்சு CD எனக் காட்டுக.

9. வெட்டும் இரண்டு வட்டங்களைக் குத்தாக வெட்டும் வட்டம் வரைக.

10. ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியில் பொதுஅச்சில் P என்னும் புள்ளி இருக்கிறது. L_1, L_2 எல்லைப் புள்ளிகள். வட்டம் PL_1L_2 தொகுதியிலுள்ள எல்லா வட்டங்களையும் குத்தாக வெட்டும் எனக் காட்டுக.

11. ஒரு இயங்கும் வட்டம் கொடுக்கப்பட்ட ஓரச்சு வட்டங்களைக் குத்தாக வெட்டுவதுடன் ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளி வழியே செல்கிறது. அது மற்ருெரு குறிப்பிட்ட புள்ளி வழிச் செல்லும் என நிருபிக்கவும்.

பயிற்சி 18 (b)

1. ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியைச் சேர்ந்த ஒரு வட்டம் வரைக :-

(a) சமத்தொடுகோடு அச்சும் ஒரு எல்லைப் புள்ளியும் கொடுத்திருந்தால்–

(b) தொகுதியிலுள்ள இரண்டு வட்டங்களும் வட்டத்தில் ஒரு புள்ளியும்–

(c) எல்லைப் புள்ளிகளும் வட்டத்தின்மேல் ஒரு புள்ளியும் ஒவ்வொன்றிலும் எத்தனை வட்டங்கள் வரையலாம் எனக் குறிப்பிடுக.

2. இரு வட்டங்களைக் குத்தாக வெட்டும் ஒருபுள்ளி வழிச் செல்லவும் ஒரு வட்டம் வரைக.

3. மூன்று வட்டங்களைக் குத்தாக வெட்டும்படி ஒரு வட்டம் வரைக.

4. ஒரு வட்டத்தைக் குத்தாக வெட்டவும் 2 புள்ளிகள் வழிச் செல்லும்படியும் ஒரு வட்டம் வரைக.

5. இரு வட்டங்களைக் குத்தாக வெட்டவும் கொடுகக்ப் பட்ட ஆரம் உடையதாகவும் உள்ள ஒரு வட்டம் வரைக.

6. இரண்டு எல்லைப் புள்ளிகளும் வட்டமையமும் கொடுத்திருந்தால் அவற்றுடன் ஒரு ஓரச்சு வட்டம் வரைக.

பயிற்சி 18 (c)

1. ஒரு நகரும் புள்ளியிலிருந்து ஒரு வட்டத்துக்கு வரையப்பட்ட தொடு கோட்டின் நீளம் ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியிலிருந்து அதன் தூரத்துக்குச் சமம். அப்புள்ளியின் நியமப் பாதை கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிக்கும் அதன் போலாருக்கும் இடையே உள்ள தூரத்தை இரு சமக் கூறிடும் ஒரு நேர்கோடு என நிரூபிக்கவும்.

2. ஒரு கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்தின் விட்டம் A, B. C, AB யின் நீட்சியில் ஏதாவது ஒரு புள்ளி. PC, C யின் தொடு நாண். C யை மையமாகவும், CP யை ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டங்கள் A, B யை எல்லைப் புள்ளிகளாகக் கொண்ட ஒரு ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியைச் சேர்ந்தவை எனக் காட்டுக.

3. ஒரு எல்லைப் புள்ளியிலிருந்து அச்சுக்கு எதிர்ப்பக்கத்தில் உள்ள ஓரச்சு வட்டங்களுக்குத் தொடுகோடுகள் வரைந்தால், தொடு புள்ளிகள் மற்றொரு எல்லைப் புள்ளியின் வழியே பொது அச்சுக்கு இணையான ஒரு நேர்கோட்டில் அமையும் என நிரூபிக்க.

4. இரு வட்டங்களின் பொதுத் தொடுகோடு, எல்லைப் புள்ளியில் ஒரு செங்கோணத்தைத் தாங்கும் என நிரூபிக்கவும்.

5. ஒரு நேர்கோடு இரு வட்டங்களை A, B, C, D யில் வெட்டுகிறது. L_1, L_2 எல்லைப் புள்ளிகள்.

$\angle AL_1 D \;+\; \angle BL_2 C \;=\; 180$ என நிரூபிக்கவும்.

6. ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியில் ஒரு வட்டத்தை L_1 என்னும் எல்லைப் புள்ளியிலிருந்து வரையப்பட்ட நேர்கோடு A, B யில் வெட்டுகிறது. O அச்சடி. AP, BQ அச்சுக்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோடுகள். $LO^2 = AQ, \odot BP$ என நிரூபிக்கவும்.

7. $\triangle ABC$ யில் AP, BQ, CR சுற்று வட்டத்தின் தொடுகோடுகள். அவை BC, CA, AB யை முறையே P, Q, R இல் சந்திக்கின்றன. AP, BQ, CR விட்டங்களாகவுடைய வட்டங்கள் ஓரச்சு வட்டங்கள் என நிரூபிக்கவும்.

8. S_1, S_2 ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியைச் சேர்ந்த இரு வட்டங்கள் அவை பொது அச்சுக்கு எதிர் பக்கங்களில் இருக்கின்றன· L_1, L_2 எல்லைப் புள்ளிகள் $\odot$ ஒரு நேர்கோடு S_1 ஐ A, B இல் வெட்டுகிறது; P யில் S_2 ஐத் தொடுகிறது. L_1P, L_2P முறையே $\angle AL_1B$, $\angle A\angle_2 B$ யின் வெளிப்புற இரு சமவெட்டிகள் என நிரூபிக்கவும்.

9. A, ஒரு வட்டம் மற்றொரு வட்டத்தின் உள்ளே இருக்கிறது· வெளி வட்டத்தின் நாண் AB, உள் வட்டத்தை C யில் தொடுகிறது. இரு வட்டங்களுக்கும் எல்லைப் புள்ளிகள் L_1, L_2, L_1C, $\angle AL_1 B$ யின் இரு சம வெட்டி என்றும், L_2C, $\angle AL_2B$ யின் இரு சம வெட்டி என்றும் நிரூபிக்கவும்.

10· A, B இரண்டு குறிப்பிட்ட புள்ளிகள். P ஒரு இயங்கும் புள்ளி. $\dfrac{PA}{PS}$ ஒரு மாறிலி என்றால், P யின் நியமப்பாதை A, B யைத் தன் மாற்றுப் புள்ளிகளாக உள்ள ஒரு வட்டம் என நிரூபிக்கவும்.

11. *ABCD* ஒரு வட்ட நாற்கரம். *A*, *B* தன் மாற்றுப் புள்ளிகளாக இருக்கும்படி ஒரு வட்டமும், *C*, *D* தன் மாற்றுப் புள்ளிகளாக இருக்கும்படி மற்றொரு வட்டமும் வரையப்படுகின்றன. இந்த இரண்டு வட்டங்களின் சமத்தொடு கோட்டச்சு ஒரு நிலையான புள்ளி வழியே செல்கிறது என்றும் அவற்றின் எல்லைப்புள்ளிகள் ஒரு குறிப்பிட்ட வட்டத்தின் மேல் உள்ளன என்றும் நிரூபிக்கவும்.

12. *A B* ஒரு நேர்கோடு. அதற்குவெளியே *C* ஒரு புள்ளி. *P*, *AB* யில் ஏதாவது ஒரு புள்ளி. *CD*, *AB* க்குக் குத்துக் கோடு *C P* யை *P* யில் தொடும்படியும், *CD* யில் மையம் இருக்கும் படியும் வரையப்படும் வட்டங்கள் ஓரச்சு வட்டங்கள் என நிரூபிக்கவும். இவற்றின் எல்லைப் புள்ளிகள் யாவை?

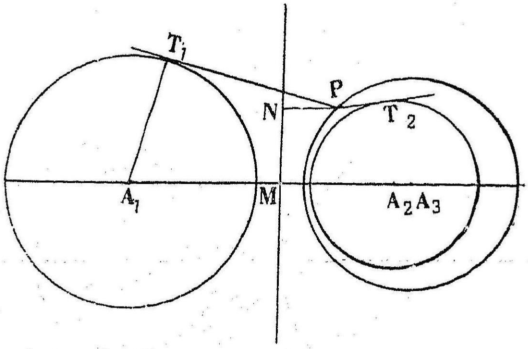
13. ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியிலுள்ள வட்டங்களுக்கு ஒரு புள்ளியின் தன் மாற்றுப் புள்ளிகள் குறித்தால் அவை ஒரு வட்டத்தில் அமையும் என நிரூபிக்கவும்.

14. ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியிலுள்ள ஒரு வட்டத்துக்கு *P*, *Q* துணையியப் புள்ளிகள். (காஞ்சுகேட் புள்ளிகள்) *PQ* வை விட்டமாகவுடைய வட்டம் எல்லைப் புள்ளிகள் வழிச் செல்கிறது என நிரூபிக்கவும்.

15. ஒரு நேர்கோட்டில் வட்ட மையங்கள் அமைந்த தொகுதியிலுள்ள வட்டங்களுக்கு இரு குறிப்பிட்ட புள்ளிகள் காஞ்சுகேட் புள்ளிகள் ஆனால் அது ஓரச்சு வட்டத் தொகுதி என்று நிரூபிக்கவும்.

தேற்றம் 40

மூன்று வட்டங்கள் ஓரச்சு வட்டங்களானால் ஒரு வட்டத்தின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளிக்கு மற்ற இரண்டு வட்டங்களின் வர்க்கங்களின் விகிதம் மாறிலி.



படம் 29

கொள்கை:

(1) வட்டங்கள் (A_1), (A_2), (A_3) ஓரச்சு வட்டங்கள்.

(2) P, வட்டம் (A_3) யின் மேல் ஏதாவது ஒரு புள்ளி.

(3) PT_1, PT_2 வட்டங்கள் (A_1) (A_2) க்குத் தொடுகோடுகள்.

நிரூபிக்க:

$$\frac{PT_1^2}{PT_2^2}$$ ஒரு மாறிலி என.

நிரூபணம்:

P யிலிருந்து பொது அச்சுக்கு லம்பம் PN வரைக.

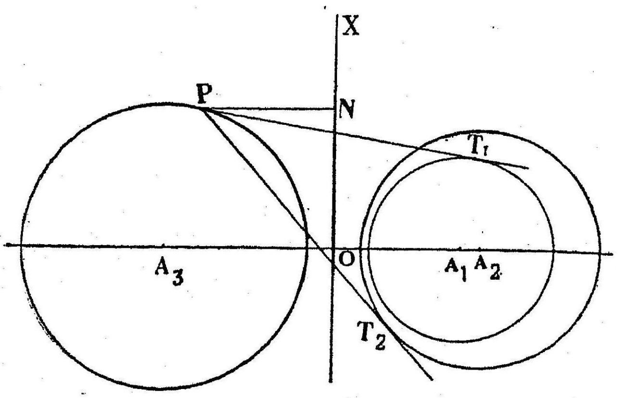
$PT_1^2 = 2A_1A_3 . PN.$ (தேற்றம் 35)

$PT_2^2 = 2A_2A_3 . PN.$ (,, ,,)

$$\therefore \frac{PT_1^2}{PT_2^2} = \frac{A_1A_3}{A_2A_3}.$$ (ஒரு மாறலி)

தேற்றம் 41

இரண்டு வட்டங்களுக்கு ஒரு புள்ளியின் வர்க்கங்களின் (Power) விகிதம் மாறுமலிருக்கும்படி ஒரு புள்ளி நகர்ந்தால் அதன் நியமப்பாதை கொடுக்கப்பட்ட வட்டங்களுடன் ஓரச்சு வட்டமாகும்.



படம் 30

கொள்கை:

(1) A_1, A_2 கொடுக்கபபட்ட இரண்டு வட்டங்களின் மையங்கள்.

(2) P ஏதாவது ஒரு புள்ளி. ⊙ PT_1, PT_2, P யிலிருந்து ⊙ (A_1), ⊙ (A_2) க்கு வரையப்பட்ட தொடுகோடுகள்.

(3) $\frac{PT_1^2}{PT_2^2}$ = மாறுதது = R என்போம்.

நிரூபிக்க:

P யின் நியமப்பாதை, ⊙ (A_1); ⊙ (A_2) உடன் ஓரச்சு வட்டம் என.

நிருபணம்

OX, வட்டம் (A_1), வட்டம் (A_2) இன் சமத் தொடு கோட்டச்சு ஆகட்டும். O, அச்சடி.

P யிலிருந்து XO க்கு PN என்னும் லம்பம் வரைக.

P வழியே, இரண்டு வட்டங்களுடன் ஓரச்சு வட்டம் (A_3) யை வரைக.

$$\therefore \quad \frac{PT_1^2}{PT_2^2} = \frac{A_1A_3}{A_2A_3}.$$

ஆனல் $\frac{PT_1^2}{PT_2^2}$ = மாறிலி = k.

$$\therefore \quad \frac{A_1A_3}{A_2A_3} = k.$$

$\therefore A_1 A_2$ ஐ A_3 k என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கிறது.

$\therefore A_3$ ஒரு நிலையான புள்ளி.

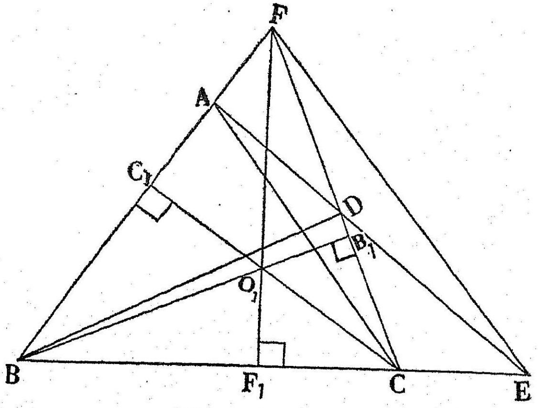
P, A_3 யை மையமாகக் கொண்ட ஓரச்சு வட்டத்தில் இருக்கிறது.

$\therefore A_3$ ஐ மையமாகக் கொண்ட ஓரச்சு வட்டம் ஒன்று தான் உண்டு.

$\therefore P$ யின் நியமப்பாதை ஒரு குறிப்பிட்ட ஓரச்சு வட்டமாகும்.

தேற்றம் 42

ஒரு முழு நாற்கரத்தின் மூலை விட்டங்களை விட்டங்களாகவுடைய வட்டங்கள் ஓரச்சு விட்டங்கள்.



IV படம் 31

கொள்கை:

(1) AB, BC, CD, CA ஒரு முழு நாற்கரம்.

(2) AC, BD, EF அதன் மூலைவிட்டங்கள்.

நிரூபிக்க: AC, BD, EF இவற்றை விட்டங்களாகக் கொண்ட வட்டங்கள் ஓரச்சு வட்டங்கள் என.

நிருபணம்: நாற்கரத்தின் 3 பக்கங்கள் AB, BC, CD யாலான $\triangle FBC$ யை எடுத்துக் கொள்க. FF_1, BB_1, CC_1 என்னும் குத்துக் கோடுகள் வரைக.

அவை O_1 இல் சந்திக்கட்டும்.

O_1, $\triangle FBC$ யின் குத்துச் சந்தி.

$$\therefore FO_1 \odot O_1F_1 = BO_1 \odot O_1B_1 = CO_1 \,.\, O_1C_1 \qquad (1)$$

$\angle AC_1 C = 90°$.

$\therefore AC$ யை விட்டமாகவுடைய வட்டம் C_1 வழியே செல்கிறிது.

மேலும் O_1, CC_1 இல் இருக்கிறது.

$\therefore AC$ யை விட்டமாகவுடைய வட்டத்துக்கு O_1 வின் வர்க்கம் $CO_1 . O_1C_1$. (1)

அதுபோலவே BD யை விட்டமாகவுடைய வட்டம் B_1 வழிச் செல்கிறது.

$\therefore$ இந்த வட்டத்துக்கு O_1 இன் வர்க்கம் $= BO_1 \cdot O_1 B_1$. (3)

EF ஐ விட்டமாகவுடைய வட்டம் F_1 வழிச் செல்கிறது.

$\therefore$ இந்த வட்டத்துக்கு O_1 இன் வர்க்கம்.

$$= FO_1 \cdot O_1F_1. \quad (4)$$

ஆனுல் $CO_1 \cdot O_1C_1 = BO_1 \cdot O_1B_1 = FO_1 \cdot O_1F_1$ (1) இன்படி
$\therefore AC$, BD, EF விட்டங்களாகவுடைய மூன்று வட்டங்களுக்கும் O_1 இன் வர்க்கங்கள் சமம்.

$\therefore O_1$, மூன்று வட்டங்களின் 3 அச்சுகளிலும் அமையும்.

முழு நாற்கரத்தின் பக்கங்களை 3, 3 ஆக எடுத்தால், இன்னும் 3 முக்கோணங்கள் கிடைக்கும். அவை $\triangle EAB$, $\triangle FAD$, $\triangle EDC$ ஆகும்.

இந்த 3 முக்கோணங்களும் குத்துச் சந்திகள் O_2, O_3, O_4 என்போம்.

முன்போலவே O_2, O_3, O_4 இவற்றின் வர்க்கங்கள் 3 வட்டங்களுக்கு சமம் என நிரூபிக்கவும்.

$\therefore O_2, O_3, O_4$ இவையும் 3 அச்சுகளிலும் அமையும்.

$\therefore O_1 O_2 O_3 O_4$ பொது அச்சாகும்.

$\therefore AC, BD, EF$ விட்டங்களாகவுடைய வட்டங்கள் ஓரச்சு வட்டங்கள்.

கிளைத் தேற்றங்கள்

1. $abcd$ என்னும் முழுநாற்கரத்தில் $\triangle abc$ யின் குத்துச் சந்தி O_1, $\triangle bcd$ யின் குத்துச் சந்தி O_2 என்ருல், $\triangle cda$, $\triangle dab$ யின் குத்துச் சந்திகளும் $O_1 O_2$ இல் அமையும்.

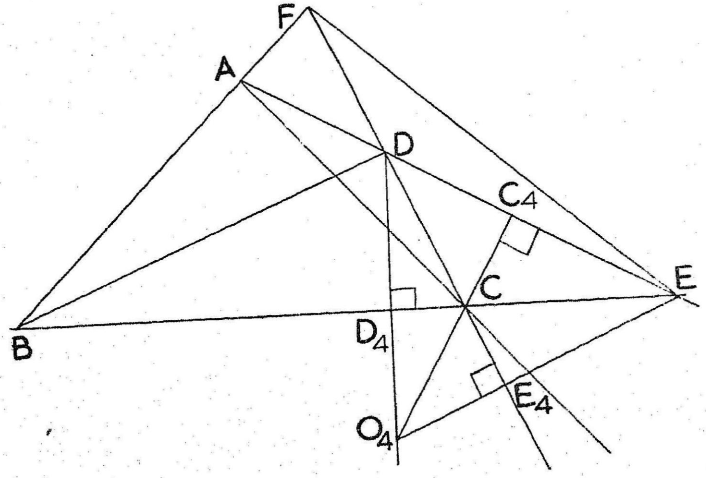
2. ஒரு முழு நாற்கரத்தின் மூலை விட்டங்களின் நடுப் புள்ளிகள் ஒரு நேர்கோடமைவன :

AC, BD, EF ஐ விட்டங்களாகவுடைய வட்டங்கள் ஓரச்சு வட்டங்கள்.

∴ அவற்றின் மையங்கள் ஒரு நேர்கோட்டில் அமைவன.

∴ AC, BD, EF இவற்றின் மையப் புள்ளிகள் ஒரு நேர்கோடமைவன.

8. ஒரு முழு நாற்கரத்தின் பக்கங்களை மூன்று மூன்றாக எடுக்க உண்டாகும் நான்கு முக்கோணங்களின் தன்னிசை வட்டங்கள் (Polar circles) (போலர் வட்டங்கள்), நாற்கரத்தின் மூலை விட்டங்களை விட்டங்களாகவுடைய வட்டங்களைக் குத்தாக வெட்டும்.



IV படம் 32

படம் 33 இல் $\triangle DCE$ யை எடுத்துக் கொள்வோம்.

CC_4, DD_4, EE_4 குத்துக் கோடுகள். அவை O_4 இல் சந்திக்கின்றன.

($\triangle DCE$, நாற்கரத்தின் 3 பக்கங்களால் ஆகும் 4 முக்கோணங்களில், நாம் நான்காவதாக எடுத்துக் கொண்டதால் குத்துச் சந்தியை O_4 என்றும், குத்துக் கோடுகளை DD_4, EE_4, CC_4 என்றும் குறிப்பிட்டிருக்கிறோம்.)

O_4, $\triangle CDE$ யின் போலார் வட்ட மையம்.

போலார் வட்டத்தின் ஆரம் r_4 ஆனல், $r^2_4 = O_4D. O_4D_4 = O_4C. O_4C_4 = O_4E. O_4E_4$.

∴ போலார் விட்டம் (O_4) க்கு.

D, D_4; C, C_4; E, E_4 தன் மாற்றுப் புள்ளிகள்.

AC யை விட்டமாகவுடைய வட்டம் C_4 வழிச் செல்கிறது.

BD யை விட்டமாகவுடைய வட்டம் D_4 வழிச் செல்கிறது.

EF ஐ விட்டமாகவுடைய E_4 வழிச் செல்கிறது.

∴ இந்த வட்டங்கள் முறையே வட்டம் (O_4) இன் தன் மாற்றுப் புள்ளிகளான C, C_4; D, D_4; E, E_4 வழிச் செல்கின்றன.

∴ இவை போலார் வட்டம் (O_4)ஐக் குத்தாக வெட்டுகின்றன.

இதுபோலவே O_1, O_2, O_4 மையங்களாகக் கொண்ட மற்ற போலார் வட்டங்களையும் AC, BD, EF ஐ விட்டங்களாகக் கொண்ட மூன்று வட்டங்களும் குத்தாக வெட்டுகின்றன. என்று நிரூபிக்கலாம்.

குறிப்பு: நான்கு முக்கோணங்களில் விரிகோண முக்கோணங்களுக்கு போலார் வட்டங்கள் உண்மை வட்டங்கள். குறுங்கோண முக்கோணங்களுக்கு போலார் வட்ட மையங்கள் உண்மையேயாயினும் வட்டங்களின் ஆரங்கள் கற்பனை எண்கள். ஆகவே வட்டங்களும் கற்பனை வட்டங்கள்.

இதனால்தான் விரிகோண முக்கோணமாகிய $\triangle DCE$ யை எடுத்து நிரூபித்தோம். ஆனால் நிரூபணம் மற்ற முக்கோணங்களுக்கும் பொருந்தும்.

கற்பனை வட்டத்தால் தன் மாற்றுப்புள்ளிகள் மையத்துக்கு எதிர் திசைகளில் இருக்கும்.

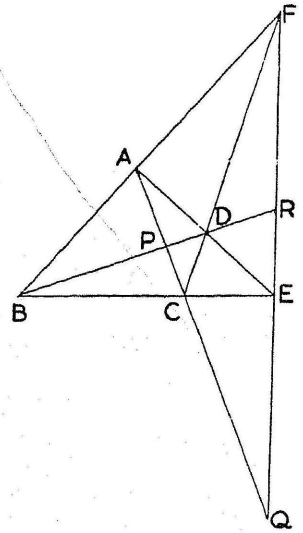
4. ஒரு முழு நாற்கரத்தின் பக்கங்களை மூன்று, மூன்றாக எடுக்க உண்டாகும் முக்கோணங்களின் தன்னிசை வட்டங்கள (போலார் வட்டங்கள்) ஓரச்சு வட்டங்களாகும்.

(AC, BD, EF விட்டங்களாகவுடைய வட்டங்கள் ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியைச் சேர்ந்தவை. அவற்றை 4 வட்டங்களும் குத்தாக வெட்டுகின்றன.)

5. ஒரு முழு நாற்கரத்தின் நான்கு முக்கோணங்களின் குத்துச் சந்திகளை இணைக்கும் கோடு, AC, BD, EF இவற்றின் நடுப் புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டுக்குக் குத்துக் கோடு.

($O_1 O_2 O_3 O_4$, AC, BD, EF ஐ விட்டங்களாகவுடைய வட்டங்களுக்குப் பொது அச்சு.)

6. முழு நாற்கரத்தின் மூலை விட்ட முக்கோணத்தின் சுற்று வட்டம், நான்கு முக்கோணங்களின் போலார் வட்டங்களுடன் ஓரச்சு வட்டமாகும்.



IV படம் 33

மூலை விட்ட முக்கோணம் PQR என்போம்.

AC, BD, P யிலும்; AC, EF Q விலும்; BD, EF R இலும் வெட்டுகின்றன.

$(BR, PR) = -1.$

∴ வட்டம் (PQR) BD யை விட்டமாகவுடைய வட்டத்தைக் குத்தாக வெட்டுகிறது.

$(AC, PQ) = -1.$

$(FE, RQ) = 1.$

∴ வட்டம் PQR, AC, EF ஐ விட்டங்களாகவுடைய வட்டங்களையும் குத்தாக வெட்டுகிறது.

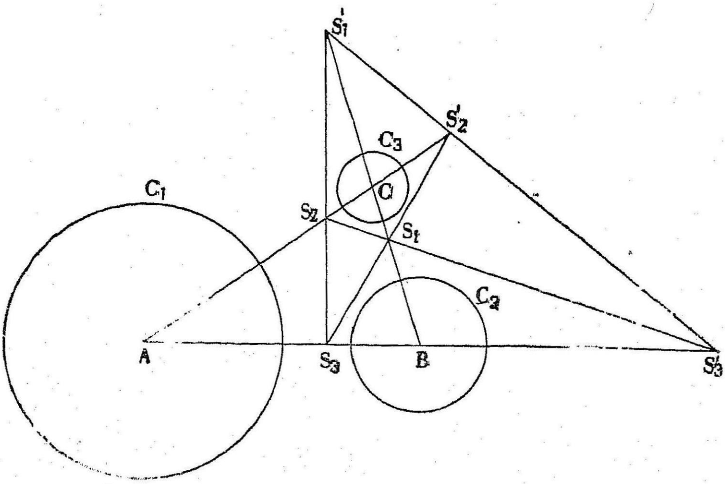
∴ அது 4 போலார் வட்டங்களுடன் ஓரச்சு வட்டமாகும்.

∴ ΔPQR இன் சுற்று வட்ட மையம்,
$O_1\ O_2\ O_3\ O_4$ இல் அமையும்.

ஒரு நாற்கரத்தின் மூலை விட்டங்களை விட்டங்களாகக் கொண்ட வட்டங்கள் நான்கு முக்கோணங்களின் போலார் வட்டங்கள் ஒன்றுக்கொன்று குத்தான ஓரச்சு வட்டத் தொகுதிகள். இவற்றில் ஒன்று வெட்டும் ஓரச்சு விட்டத் தொகுதியானல் மற்றொன்று வெட்டாத ஓரச்சுத் தொகுதியாகும். வெட்டும் ஓரச்சுத் தொகுதியின் வெட்டுப் புள்ளிகள் இரண்டும் மற்ற ஓரச்சு வட்டத் தொகுதிக்கு எல்லைப் புள்ளிகளும், தன் மாற்றுப் புள்ளிகளும் ஆகும்.

தேற்றம் 43

மூன்று வட்டங்களை இரண்டிரண்டாக எடுக்க அவற்றின் வடிவொப்பு வட்டங்கள் ஓரச்சு வட்டங்கள் ஆகும்.



IV படம் 34

கொள்கை : (1) A, B, C வட்டங்களின் மையங்கள்.

(2) வட்டங்கள் $(B), (C)$ யின் வடிவொப்பு மையங்கள் S_1, S_1'.

(3) வட்டங்கள் $(C) (A)$ யின் வடிவொப்பு மையங்கள் S_2, S_2'.

(4) வட்டம்கள் $(A), (B)$ யின் வடிவொப்பு மையங்கள் S_3, S_3'.

நிரூபிக்க : $S_1 S_1'$, $S_2 S_2'$, $S_3 S_3'$ விட்டங்களாகவுடைய வட்டங்கள் ஓரச்சு வட்டங்கள் என.

நிரூபணம் : Aயை மையமாகவுடைய வட்டத்தை C_1 என்றும் Bயை மையமாகவுடைய வட்டத்தை C_2 என்றும் Cயை மையமாகவுடைய வட்டத்தை C_3 என்றும் சொல்வோம்.

அவற்றின் ஆரங்கள் முறையே r_1, r_2, r_3 ஆகுக.

S_1, வடிவொப்பு மையங்கள்

$$\therefore \frac{BS_1}{S_1C} = \frac{BS'_1}{CS'^1} = \frac{r_2}{r_3}.$$

$$(\text{அதுபோலவே}) \frac{CS_3}{S_3A} = \frac{CS_2'}{AS_2'} = \frac{r_3}{r_1}.$$

$$\frac{AS_3}{S_3B}=\frac{AS_3'}{BS_3'}=\frac{r_1}{r_2}.$$

$$\therefore\quad \frac{BS_1'}{S_1'C}\cdot\frac{CS_2'}{S_2'A}\cdot\frac{AS_3'}{S_3'B}=\left(-\frac{r_2}{r_3}.\right)\left(-\frac{r_3}{r_1}\right)\left(-\frac{r_1}{r_2}\right)=-1.$$

$\therefore$ S_1', S_2', S_3 ஒரு கோடமைவன.

இன்னும் $\frac{BS_1'}{S_1C}\cdot\frac{CS_2}{S_2A}\cdot\frac{AS_3'}{S_3'B}=\frac{r_2}{r_3}\cdot\frac{r_3}{r_1}\cdot\left(-\frac{r_1}{r_2}\right)-=1.$

$\therefore$ S_1, S_2, S_3' ஒரு கோடமைவன.

அதுபோல் S_2, S_3, S_1' ; S_3, S_1 S_2' இவை ஒரு கோடமைவன என நிரூபிக்கலாம்.

$\therefore$ S_1, S_2, S_3, S_1', S_2', S_3' ஒரு முழு நாற்கரத்தின் உச்சிகள். S_1S_1', S_2S_2', S_3S_3' அதன் மூலை விட்டங்கள்.

$\therefore$ S_1S_1', S_2S_2', S_3S_3' ஐ விட்டங்களாகவுடைய வட்டங்கள் ஓரச்சு வட்டங்கள்.

கிளைத்தேற்றம் :

1. மூன்று வட்டங்களை இரண்டிரண்டாக எடுக்க அவற்றின் வடிவொப்பு வட்டங்கள் வட்ட மையங்கள் வழிச் செல்லும் வட்டத்தைக் குத்தாக வெட்டுகின்றன.

(S_1, S_2, முதலிய உச்சிப் புள்ளிகள் உள்ள நாற்கரத்தின் மூலைவிட்ட முக்கோணம் ABC யாகும். $\therefore$ தேற்றம் 42-கிளை 6 ஐ உபயோகிக்கவும்)

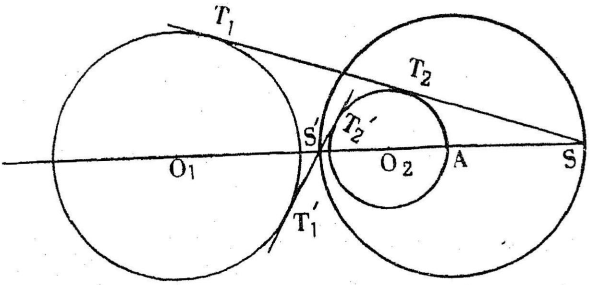
2. மூன்று வட்டங்களை இரண்டிரண்டாக எடுக்க அவற்றின் வடிவொப்பு வட்டங்களின் சமத்தொடு கோட்டச்சில், வட்டமையங்கள் வழிச்செல்லும் வட்டத்தின் மையம் அமையும்.

(S_1S_1', S_2 S_2', S_3 S_3' ஐ விட்டங்களாகக் கொண்ட வட்டங்களின் சமத்தொடு கோட்டச்சில் $\triangle ABC$ யின் சுற்றுவட்ட மையம் அமையும்)

$\therefore$ $\triangle$ ABC இந்த வட்டங்களைக் குத்தாக வெட்டுகிறது.)

தேற்றம் 44

இரண்டு வட்டங்களின் வடிவொப்பு வட்டம் (Circle of similitude) அவற்றுடன் ஓரச்சு வட்டமாகும்.



IV படம் 35

கொள்கை : (1) O_1, O_2 இரண்டு வட்டங்களின் மையங்கள். அவற்றின் ஆரங்கள் r_1, r_2 ஆகுக.

(2) S, S' அவற்றின் வடிவொப்பு மையங்கள்.

(3) வட்டம் (A), SS' ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வடிவொப்பு வட்டம்.

நிருபிக்க : வட்டம் (O_1), வட்டம் (O_2), வட்டம் (A) இவை ஓரச்சு வட்டங்கள் என.

நிருபணம் : S, S' வழியே வட்டங்கள் (O_1), (O_2) க்குத் தொடுகோடுகள் வரைக.

அவை வட்டங்களை T_1, T_2, ; T_1', T_2' இல் தொடட்டும்.

$$\frac{ST_1}{ST_2} = \frac{r_1}{r_2}.$$

$$\therefore \quad \frac{ST_1^2}{ST_2^2} = \frac{r_1^2}{r^2} \text{ (ஒரு மாறிலி)}$$

மேலும் $$\frac{S^4T_1'}{S'T_2'} = \frac{r_1}{r_2}$$

$$\therefore \quad \frac{S'T_1'^2}{S'T_2'^2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{ST_1^2}{ST_2^2}$$

$\therefore$ வட்டங்கள் (O_1), (O_2) க்கு S, S' இன் வர்க்கங்களின் விகிதங்கள் சமம்.

$\therefore$ வட்டங்கள் (O_1), (O_2) உடன் ஓரச்சு வட்டம் ஒன்று S வழிச் செல்லுமாயின், அது S' வழியும் செல்லும்.

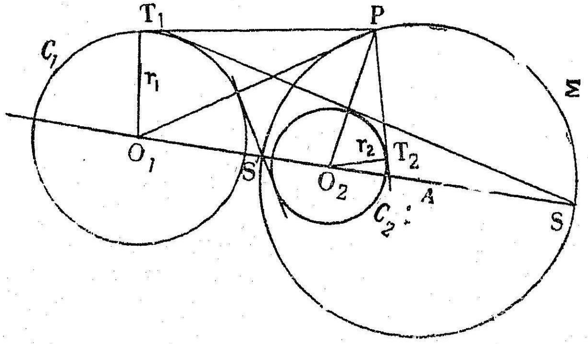
$\therefore$ வர்க்கங்களின் விகிதங்கள் சமமாக உள்ள புள்ளிகளின் நியமப்பாதை ஒரு ஓரச்சு வட்டம் (தேற்றம்-41)

ஆனால் SS' வழிச் செல்லும் ஓரச்சு வட்டத்தின் மையம் $O_1 O_2$ இல் இருக்கும்.

∴ அது SS' ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம்.

∴ SS' ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் வட்டங்கள் (O_1) (O_2) உடன் ஓரச்சு வட்டம் ஆகும்.

மாற்று நிரூபணம் :



IV படம் 36

கொள்கை : (1) வட்டங்கள் (O_1), (O_2) தரப்பட்டிருக்கின்றன. அவற்றின் ஆரங்கள் r_1, r_2 வட்டங்களை C_1, C_2 என்போம்.

(2) S, S' வடிவொப்பு மையங்கள்

(3) P வடிவொப்பு வட்டத்தில் $\sum$ ஏதாவது ஒரு புள்ளியாக இருக்கட்டும்.

நிரூபிக்க : C_1, C_2, $\sum$ இவை ஓரச்சு வட்டங்கள் என.

நிரூபணம் : P யிலிருந்து வட்டங்கள் C_1, C_2 க்கு PT_1, PT_2 என்னும் தொடுகோடுகள் வரைக.

PO_1, O_1T_1, PO_2, O_2T_2 ஐச் சேர்.

$\sum$, $\triangle\, O_1PO_2$ இன் அபொலோனியஸ் வட்டம்.

$$\therefore \quad \frac{PO_1}{PO_2} = \frac{O_1S}{O_2S}.$$

ஆனல் $\dfrac{O_1S}{O_2S} = \dfrac{r_1}{r_2}$ (S, வடிவொப்பு மையங்கள்)

$$\therefore \frac{PO_1}{PO_2} = \frac{r_1}{r_2}.$$

$$\therefore \frac{PO_1}{PO_2} = \frac{O_1T_1}{O_2T_2}.$$

$$\therefore \frac{PO_1}{O_1T_1} = \frac{PO_2}{O_2T_2}.$$

$\therefore$ $\triangle PO_1T_1$ $\triangle PO_2T_2$ இல்,

$$\frac{PO_1}{O_1T_1}=\frac{PO_2}{O_2T_2}$$

மேலும் $\angle O_1T_1P = \angle O_2T_2P = 90.^\circ$

$$\therefore \quad \triangle PO_1T_1 \parallel\!\mid \triangle PO_2T_2.$$

$$\therefore \quad \frac{PT_1}{PT_2}=\frac{O_1T_1}{O_2T_2}=\frac{r_1}{r_2}.$$

$$\therefore \quad \frac{PT_1^2}{PT_2^2}=\frac{r_1^2}{r_2^2}.$$ (ஒரு மாறிலி)

(அ து) வட்டங்கள் C_1, C_2 க்கு P யின் வர்க்கங்களின் விகிதம் ஒரு மாறிலி.

$\therefore$ ஒரு ஓரச்சு வட்டத்தில் இருக்கிறது.

$\therefore$ $\sum$, C_1, C_2 இவை ஓரச்சு வட்டங்கள்.

குறிப்பு

வட்டம் (O_1), வட்டம் (O_2), வடிவொப்பு விட்டம் (A) இவற்றின் சமத் தொடுகோட்டச்சு, T_1T_2, $T_1'T_2'$ இவற்றின் நடுப்புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்கோடு ஆகும்.

இந்த ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியின் எல்லைப்புள்ளிகள் T_1 T_2 விட்டமாகவுடைய வட்டம் O_1O_2 ஐ வெட்டும் புள்ளிகள் L_1, L_2

$$\frac{O_1S'}{S'O_2} = \frac{O_1S}{O_2S} = \frac{r_1}{r_2}$$ ஆனதால் $(O_1O_2, S'S) = -1$.

$\therefore$ வடிவொப்பு வட்டம் O_1 O_2 வழிச் செல்லும் எல்லா வட்டங்களையும் குத்தாக வெட்டும்.

$\therefore$ வடிவொப்பு வட்டம் O_1, O_2 எல்லைப் புள்ளிகளாக உள்ள ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியைச் சேர்ந்தது என முன்பு பார்த்தோம்.

இந்த ஓரச்சு வட்டத் தொகுதிக்கு O_1O_2 இன் நடுக்குத்துக் கோடு பொது அச்சு.

$\therefore$ O_1O_2 வை மையப் பிணை கோடாகவுள்ள இரண்டு ஓரச்சு வட்டத் தொகுதிகள் உண்டு. L_1, L_2, $\odot(A)$; $\odot(O_1)$, $\odot(O_2)$, $\odot(A)$ வடிவொப்பு வட்டம் அவை இரண்டுக்கும் பொது என்பது புலனாகிறது.

கிளைத் தேற்றங்கள்

(1) இரண்டு வட்டங்களின் வடிவொப்பு வட்டத்தின் மேல் P ஏதாவது ஒரு புள்ளியானால், P யிலிருந்து வட்டங்களுக்கு வரையப்பட்ட தொடுகோடுகளின் விகிதம் அவற்றின் ஆரங்களின் விகிதங்களுக்குச் சமம்.

(2) இரண்டு வட்டங்கள் வடிவொப்பு வட்டத்தின் மேல் எந்தப் புள்ளியிலும் சமகோணங்களைத் தாங்குகின்றன.

$$(\triangle\ P\,O_1T_1 \ \|\!|\ \triangle\ P\,O_2T_2.$$
$$\therefore\ \angle\ O_1\,PT_2 = \angle\ O_2\,PT_2.)$$

(3) SS' விட்டமாகவுடைய வட்டத்தில் ($\sum$) P என்னும் புள்ளி எடுத்தால்,

$$\frac{PT_1}{PT_2} = \frac{r_1}{r_2};\ \frac{PT_1^2}{PT_2^2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}.$$

$\sum$, ஓரச்சு வட்டமாதலால், A அதன் மையமாக இருந்தால்,

$$\frac{PT_1^2}{PT_2^2} = \frac{O_1A}{O_2A}. \qquad \text{(தேற்றம் 40)}$$

$$\therefore\ \frac{O_1A}{O_2A} = \frac{r_1^2}{r_2^2}.$$

(4) இரண்டு வட்டங்கள் ஒரு புள்ளியில் சம கோணங்களைத் தாங்கினால் அந்தப் புள்ளியின் நியமப் பாதை கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு வட்டங்களுடன் ஓரச்சு வட்டமாகும்.

IV — படம் 36 பார்க்கவேண்டும்.

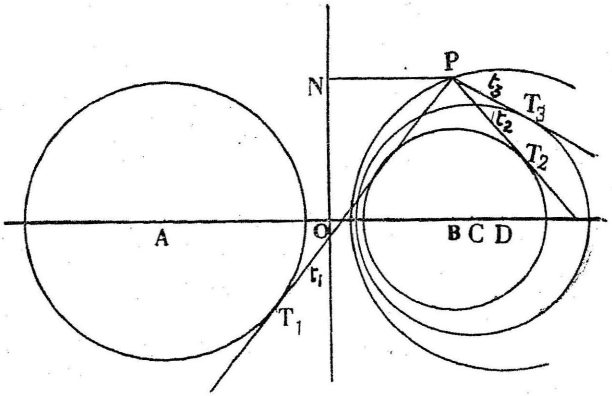
$$\angle\ O_1PT_1 = \angle\ O_2\,PT_2.$$
$$\angle\ T_1 = \angle\ T_2 = 90°.$$
$$\therefore\ \triangle\ O_1\,PT_1 \ \|\!|\ \triangle\ O_2\,PT_2.$$
$$\therefore\ \frac{PT_1}{PT_2} = \frac{O_1T_1}{O_2T_2} = \frac{r_1}{r_2}.$$
$$\therefore\ \frac{PT_1^2}{PT_2^2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \text{ஒரு மாறிலி.}$$

$\therefore$ P யின் நியமப் பாதை கொடுக்கப்பட்ட வட்டங்களுடன் ஓரச்சு வட்டமாகும்.

மாதிரிகள்

1. மூன்று ஓரச்சு வட்டங்களின் மையங்கள் A, B, C P என்னும் ஏதாவது ஒரு புள்ளியிலிருந்து அவற்றிற்கு வரையப்பட்ட தொடுகோடுகள் t_1, t_2, t_3.

$BC\cdot t_1^2 + CA\cdot t_2^2 + AB\cdot t_3^2 = 0$ என நிரூபிக்கவும்.



IV படம் 37

கொள்கை:

(1) வட்டங்கள் (A), (B), (C) ஓரச்சு விட்டங்கள்.

(2) P ஏதாவது ஒரு புள்ளி.

(3) P யிலிருந்து தொடுகோடுகளின் நீளங்கள் t_1, t_2, t_3.

நிரூபிக்க:

$$BC \cdot t_1^2 + CA \cdot t_2^2 + AB\, t_3^2 = 0.$$

நிரூபணம்

ON வட்டங்களின் பொது அச்சு ஆகட்டும்.

$PN \perp ON$ வரைக.

P வழிச் செல்லும் ஓரச்சு வட்டத்தின் மையம் D ஆகட்டும்.

$PT_1^2 = 2\, AD \cdot PN$. (தேற்றம் 35)

$\therefore PT_1^2 \cdot BC = 2\, AD \cdot PN \cdot BC.$

அது போல,

$t_2^2 \cdot CA = 2\, BD \cdot PN \cdot CA.$

$t_3^2 \cdot AB = 2\, CD \cdot PN \cdot AB.$

$\therefore t_1^2 \cdot BC + t_2^2 . CA + t_3^2 \cdot AB$

$= 2\, PN\, (BC \cdot AD + CA \cdot BD + AB \cdot CD)$

$BC \cdot AD + CA \cdot BD + AB \cdot CD$

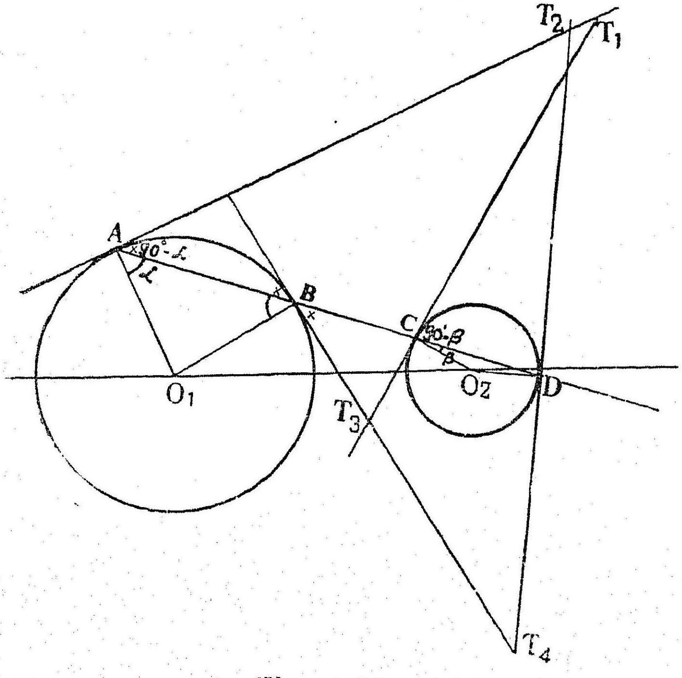
$= (AC - BD)\, AD + CA . (AD - AB) + AB\, (AD - AC)$

$= AC \cdot AD - AB \cdot AD + CA \cdot AD - AB \cdot CA + AB \cdot AD - AB \cdot AC$

$= 0.$

$\therefore t_1^2 \cdot BC + t_2^2 \cdot CA + t_3^2 \cdot AB = 0.$

2. ஒரு நேர்கோடு இரண்டு வட்டங்களை A, B ; C, D யில் வெட்டுகிறது. $A_1 B_1$ யில் வட்டங்களுக்கு வரைந்த தொடுகோடுகள் C, D யில் வரைந்த தொடுகோடுகளை T_1, T_2, T_3, T_4 கொடுக்கப்பட்ட விட்டங்களுடன் ஒரு ஓரச்சு வட்டத்தில் அமையும் என நிரூபிக்க.



IV படம் 38

கொள்கை:

(1) $\odot(O_1)$, $\odot(O_2)$ தரப்பட்டுள்ளன.

(2) $ABCD$ வட்டங்களை $A_1 B$; C, D யில் வெட்டுகிறது.

(3) A யில் தொடுகோடு, C, D யில் தொடுகோடுகளை T_1 T_2 இலும், B யில் தொடுகோடு, C, D யில் தொடுகோடுகளை T_3, T_4 இலும் வெட்டுகின்றன.

நிருபிக்க :

T_1, T_2, T_3, T_4 $\odot(O_1)$, $\odot(O_2)$ உடன் ஓரச்சு வட்டம் ஒன்றின் மேல் உள்ளன என.

நிருபணம் :

$O_1 A$, $O_1 B$, $O_2 C$, $O_2 D$ யைச் சேர்.

$\angle O_1 AB = \angle O_1 BA = \alpha$ என்போம்.

$\angle O_2CD = \angle O_2DC = \beta$ என்போம்.

$\triangle T_2 AD$ யில்

$$\frac{T_2A}{T_2D} = \frac{\sin \angle T_2DA}{\sin \angle T_2AD}$$

$$= \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}.$$

$\triangle T_3 BC$ யில்,

$$\frac{T_3B}{T_3C} = \frac{\sin \angle T_3CB}{\sin \angle T_3BC} =$$

$$= \frac{\cos\beta}{\cos\alpha.}$$

இது போலவே,

$\triangle T_1 AC, \triangle T_4 BD$

எடுத்து $\dfrac{T_1A}{T_1C} = \dfrac{T_4B}{T_4D}$

$$= \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$$

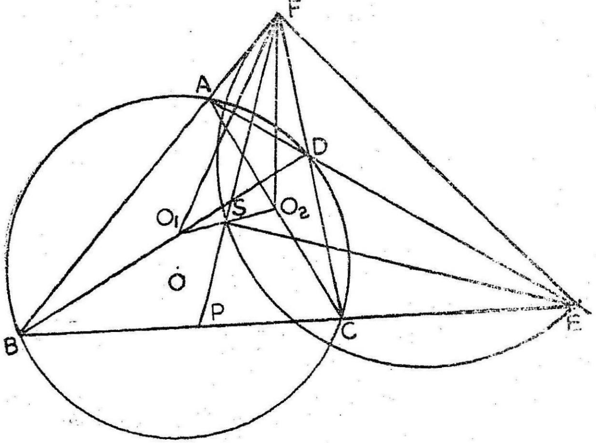
என நிரூபிக்கலாம்.

$$\therefore \frac{T_1A^2}{T_1C^2} = \frac{T_2A^2}{T_2D^2} = \frac{T_3B^2}{T_3C^2} = \frac{T_4B^2}{T_4D^2} = \frac{\cos^2\beta}{\cos^2\alpha}.$$

$\therefore$ இரண்டு வட்டங்களுக்கும், T_1, T_2, T_3, T_4 இவற்றின் வர்க்கங்களின் விகிதங்கள் சமம்.

$\therefore$ அவை வட்டங்கள் (O_1), (O_2) உடன் ஒரு ஓரச்சு வட்டத்தின் மேல் இருக்கின்றன.

3. ஒரு வட்ட நாற்கரத்தில் மூன்றுவது மூலை விட்டத்தை விட்டமாகக் கொண்டவட்டம், மற்ற இரண்டு மூலை விட்டங்களாகக் கொண்ட வட்டங்களுடைய வடிவொப்பு வட்டம் (Circle of Similitude) என நிரூபிக்கவும்.



IV படம் 39

கொள்கை: (1) வட்ட நாற்கரம் $ABCD$ யின் மூலைவிட்டங்கள் AC, BD, EF.

நிரூபிக்க: EF ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம், AC, BD இவற்றை விட்டங்களாகக் கொண்ட வட்டங்களின் வடிவொப்பு வட்டம் என.

நிரூபணம்: BD, AC யின் நடுப்புள்ளிகள் O_1, O_2 என்போம்.

FS, $\angle BFC$ யின் இருசம வெட்டி ஆகட்டும்.

$\triangle FBD$, $\triangle FCA$ இவற்றில்

$\angle F$ பொது.

$\angle FBD = \angle FCA$. (ஒரே வட்டப் பகுதியில்)

$\therefore \triangle FBD \,|||\, \triangle FCA$.

$$\therefore \frac{FB}{BD} = \frac{FC}{CA}.$$

$$\therefore \frac{FB}{\frac{1}{2}BD} = \frac{FC}{\frac{1}{2}CA}.$$

$$\text{(அ-து)} \quad \frac{FB}{BO_1} = \frac{FC}{CO_2}.$$

மேலும் $\angle FBO_1 = \angle FCO_2$.

$\triangle FBO_1 \,|||\, \triangle FCO_2$.

$$\therefore \angle BFO_1 = \angle CFO_2. \quad \& \quad \frac{FO_1}{BO_1} = \frac{FO_2}{CO_2}. \qquad -(1)$$

$\therefore FS$, $\angle O_1 FO_2$ ஐ இருசமக் கூறிடுகிறது.

அது $O_1 O_2$ வை S இல் வெட்டினால்,

$$\frac{FO_1}{FO_2} = \frac{O_1S}{SO_2}.$$

ஆனால் $\frac{FO_1}{FO_2} = \frac{BO_1}{CO_2}$. ((1) இலிருந்து)

$\therefore \quad \frac{O_1S}{SO_2} = \frac{r_1}{r} \frac{BO_1}{CO_2} = \frac{r_1}{r_2}$ (r_1, r_2 BD, CA விட்டங்களாகவுள்ள வட்டங்களின் ஆரங்கள்.)

$\therefore$ S ஒரு வடிவொப்பு மையம். (2)

அதுபோல, E யின் இருசமவெட்டி O_1 O_2 வை S' இல் வெட்டினால்,

$$\frac{EO_1}{EO_2} = \frac{O_1S'}{S'O_2} = \frac{r_1}{r_2}$$ என நிரூபிக்கவும்.

$\therefore$ S, S' உடன் பொருந்தும்.

$\therefore$ E, F இன் இருசமவெட்டிகள் O_1 O_2 ஐ ஒரு வடிவொப்பு மையத்தில் வெட்டுகின்றன. (3)

வட்ட நாற்கரம் $ABCD$ யில்,

* E, F இன் இருசம வெட்டிகள், S இல் சந்தித்தால் $\angle ESF = 90°$.

$\therefore$ EF ஐ விட்டமாகவுடைய வட்டம் S வழிச் செல்கிறது. அதுபோலவே மற்றொரு வடிவொப்பு மையம் S' வழியும் செல்லும் என நிரூபிக்கலாம்.

$\therefore$ EF ஐ விட்டமாகவுடைய வட்டம் வடிவொப்பு மையங்கள் வழிச் செல்கிறது. அது வட்டங்கள் (O_1), (O_2) உடன் ஓரச்சு வட்டமும் கூட. (தேற்றம் 42)

$\therefore$ அது வடிவொப்பு வட்டங்கள் ஆகும்.

* $\triangle FAC$ யில், $\angle F + \angle B + \angle C = 180°$

$\triangle EBA$ யில்; $\angle E + \angle B + \angle A = 180°$

$\therefore 2\angle B + \angle F + \angle E + \angle C + \angle A = 360°$

ஆனால் $\angle C + \angle A = 180°$ (வட்ட நாற்கரம்)

$\therefore 2\angle B + \angle F + \angle E = 180°$

$\therefore \angle B + \frac{1}{2} \angle F + \frac{1}{2} \angle E = 90°$.

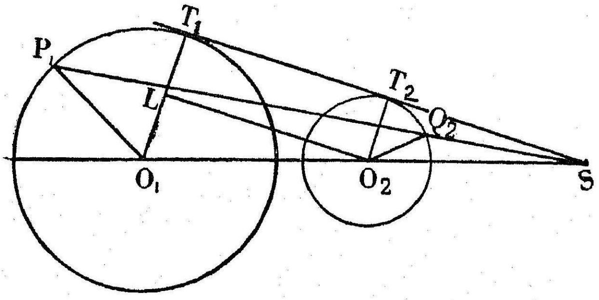
FS, BC யை P யில் சந்திக்கிறது என்போம்.

$\angle FSE = \angle SPE + \frac{1}{2}E$. ($\triangle PSC$யின் வெளிக்கோணம்)

$= \angle B + \frac{1}{2} F + \frac{1}{2} E$. ($\triangle FBP$ யின் வெளிக் கோணம் $\angle SPE$)

$\therefore \quad \angle ESF = 90°$

4. $O_1 O_2$ மையங்களாகவும், r_1, r_2 ஆரங்களாகவும் உள்ள இரண்டு வட்டங்களுக்கு வெளி வடிவொப்பு மையம். வட்ட மையங்களின் தூரம் d. S இலிருந்து ஒரு ஜதை வேற்றுப் புள்ளிகளின் (Non - Corresponding Points) தூரங்களின் பெருக்கற் பலன் $\frac{d^2-(r_1-r_2)^2}{(r_1-r_2)^2}$. $r_1 r_2$ என நிரூபிக்கவும்.



IV படம் 40

கொள்கை :

(1) $\odot(O_1)$, $\odot(O_2)$ இன் வெளி வடிவொப்பு மையம் S.

(2) வட்டங்களின் ஆரங்கள் r_1, r_2

(3) $O_1 O_2 = d$.

(4) $SP_1 Q_2$ வட்டங்களை வேற்றுப் புள்ளிகள் P_1, Q_2 இல் வெட்டுகிறது.

நிரூபிக்க :

$$SP_1 \cdot SQ_2 = \frac{d^2-(r_1-r_2)^2}{(r_1-r_2)^2} \cdot r_1, r_2 \text{ என}$$

நிரூபணம் :

$ST_1 T_2$ பொதுத் தொடு கோடு வரைக.

$ST_1 = t_1$, $ST_2 = t_2$ என்போம்.

$O_2 L \perp O_1 T_1$ இருக்கும்படி வரைக.

$$\frac{ST_1}{ST_2} = \frac{t_1}{t_2} = \frac{r_1}{r_2}.$$

$SP_1 \cdot SQ_2 = ST_1 \cdot ST_2$ (தேற்றம் 31)

$$\therefore \; ST_1 ST_2 = \frac{t}{t_2} \cdot r_2^2.$$

$$= \frac{r_1}{r_2}$$

$$SP_1\,SQ_2 = \frac{r_1}{r_2}.\ t_2^2$$

$\triangle\ SO_2\,T_2,\ \triangle O_1\,O_2\,L$ இல்,

$O_1\,T_1 \parallel O_2\,T_2.$

$\therefore\ O_1\,L \parallel O_2\,T_2.$ —(1)

$O_2\,L \perp O_1\,T_1.$

$ST_2 \perp O_2\,T_2.$

$\therefore\ O_2\,L \parallel ST_2.$

$\therefore\ \triangle\ SO_2\,T_2 \parallel\!\parallel \triangle\ O_1\,O_2\,L.$

$$\therefore\ \frac{ST_2}{O_2T_2} = \frac{O_2L}{O_1\,L}.$$

$$\therefore\ \frac{t_2}{r_2} = \frac{T_1\,T_2}{r_1 - r_2}.$$

$$\therefore\ t_2 = \frac{r_2.}{r_1 - r_2}\ T_1\,T_2$$

$$T_1\,T_2^2 = O_2\,L_2$$
$$= O_1\,O_2^2 - O_1\,L^2$$
$$= d^2 - (r_1 - r_2)^2$$

$$\therefore\ t_2^2 = \frac{r_2\,.^2}{(r_1 - r_2)^2}\left\{d^2 - (r_1 - r_2)^2\right\}$$

$$\therefore\ SP_1\,SQ_2 = \frac{r_1}{r_2}.\ t_2^2 \qquad ((1)\text{ இலிருந்து})$$
$$= \frac{r_1}{r_2}\ .\ \frac{r_2^2}{(r_1 - r_2)^2}.\ \left\{d^2 - (r_1 - r_2)^2\right\}$$
$$= \frac{d^2 - (r_1 - r_2)^2}{(r_1 - r_2)^2}.\ r_1\,r_2.$$

பயிற்சி-19 (a)

1. இரண்டு வட்டங்களின் ஆரங்கள் r_1, r_2. P ஏதாவது ஒரு புள்ளி. P யிலிருந்து வட்டங்களுக்கு வரையப்பட்ட தொடு கோடுகளின் நீளங்கள் t_1: t_2.

$\dfrac{t_1}{t_2} = \dfrac{r_1}{r_2}$ என்றால் P யின் நியமப் பாதை என்ன?

2. இரண்டு வட்டங்களின் ஆரங்கள் r_1, r_2. P ஏதாவது ஒரு புள்ளி. Pயிலிருந்து வட்டங்களுக்கு வரையப்பட்ட தொடு கோடுகளின் நீளங்கள் t_1, t_2.

$\dfrac{t_1^2}{t_2^2} = k$ ஒரு மாறிலி என்றால் P யின் நியமப் பாதை என்ன?

3. ஒரு முழு நாற்கரத்தில் AC, BD, EF மூலை விட்டங்கள். AC, BD இவற்றை விட்டங்களாகவுடைய வட்டங்கள் P யில் வெட்டினால், EF ஐ விட்டமாகவுடைய வட்டமும் P வழிச் செல்லும் என நிரூபிக்கவும்.

4. இரண்டு வெட்டும் வட்டங்களின் வடிவொப்பு வட்டம் வரைக

5. இரண்டு வெட்டும் வட்டங்களின் பொது நாணில் ஒரு புள்ளியிலிருந்து, வட்டங்களுக்குத் தொடுகோடுகளின் நீளம், அவற்றின் வடிவொப்பு வட்டத்திற்கு வரைந்த தொடுகோட்டின் நீளத்திற்குச் சமம் என நிரூபிக்க.

6. வட்ட மையங்கள் வழிச் செல்லும் எந்த வட்டமும் வடிவொப்பு வட்டத்தைக் குத்தாக வெட்டுகிறது. அது கொடுக்கப்பட்ட வட்டங்களைக் குத்தாக வெட்டுகிறதா? காரணம் கூறுக.

பயிற்சி-19 (b)

1. மூன்று ஓரச்சு வட்டங்களின் மையங்கள் A, B, C. அவற்றின் ஆரங்கள் a, b, c ஆனால்,

$$a^2 \cdot BC + b^2 \cdot CA + C^2 \cdot AB + AB \cdot BC \cdot CA = O.$$ என நிரூபிக்கவும்.

2. ஒரு வட்டத்தில் AB ஒரு இயங்கும் நாண். $\angle APB = 90°$ இருக்கும்படி ஒரு புள்ளி P நகருகிறது. AB யின் நடுப்புள்ளி C. C யின் நியமப்பாதை என்ன?

(உதவிக் குறிப்பு: கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்துடன் P யை எல்லைப் புள்ளியாகவுடைய ஒரு ஓரச்சு வட்டமாகும் என நிரூபிக்கவும். அந்த வட்டத்தின் மையத்தைக் கண்டு பிடிக்கவும்)

3. இரு வட்டங்களுக்கு AB ஒரு பொதுத் தொடுகோடு. CD, AB க்கு இணைகோடு. அது முதல் வட்டத்தை C யிலும், இரண்டாவது வட்டத்தை D யிலும் வெட்டுகிறது. CA, BD T யில் வெட்டுகின்றன: T யின் நியமப்பாதை இரு வட்டங்களுடன் ஒரு ஓரச்சு வட்டமாகும் என நிரூபிக்கவும்.

4. இரண்டு நிலையான புள்ளிகளான A, B யிலிருந்து P என்னும் புள்ளியின் தூரங்கள் ஒரு குறிப்பிட்ட விகிதத்தில் இருந்தால் P யின் நியமப்பாதை இரண்டு புள்ளிகளையும் தன் மாற்றுப் புள்ளிகளாகக் கொண்ட ஒரு வட்டம். அது அந்த இரண்டு புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் எல்லா வட்டங்களையும் குத்தாக வெட்டுகிறது என நிரூபிக்கவும்.

5. △ ABC யில், $PA : PB : PC$ குறிப்பிட்ட விகிதத்திலுள்ள படி இரண்டு புள்ளிகள் உண்டு எனவும் அவை சுற்று வட்டத்துக்குத் தன் மாற்றுப் புள்ளிகள் எனவும் நிரூபிக்கவும்.

6. ஒரு முழு நாற்கரத்தின் 2 ஜதை எதிர் உச்சிப் புள்ளிகள் ஒரு வட்டத்தின் துணையியப்புள்ளிகள் என்றால், மூன்றுவது ஜதை எதிர் உச்சிப் புள்ளிகளும் அந்த வட்டத்துக்குத் துணையியப் புள்ளிகள் என்று நிரூபிக்கவும்.

7. இரு வட்டங்களின் வடிவொப்பு வட்டத்தின்மேல் ஒரு புள்ளியிலிருந்து வட்டங்களுக்கு எதிர் பக்கத்தில் சரிந்திருக்கும்படி PT_1, PT_2 என்னும் தொடுகோடுகள் வரையப்பட்டிருக்கின்றன. T_1, T_2 இவற்றின் வர்க்கங்கள் $\odot(O_2)$, $\odot(O_1)$ க்குச் சமம் என நிரூபிக்கவும்.

(உதவிக் குறிப்பு: $T_1 O_2^2 - r_2^2 = T_1 T_2^2 - 2T_1 T_2$ $r_2 \text{ Sin } \beta$ & $r_1 \text{ Sin } \alpha = r_2 \text{ Sin } \beta$).

8. △ ABC யில் A யின் இருசம வெட்டி BC யை X இல் சந்திக்கிறது. உள் வட்டம் A க்கு எதிரே உள்ள வெளி வட்டம், AX ஐ விட்டமாகவுடைய வட்டம் இவை ஓரச்சு வட்டங்கள் என நிரூபிக்கவும்.

9. ஒரு முழு நாற்கரத்தின் மூலை விட்ட முக்கோணத்தின் சுற்று வட்ட மையம், மூலை விட்டங்களை விட்டமாகவுடைய வட்டங்களின் சமத்தொடு கோட்டச்சில் உள்ளது என நிரூபிக்கவும்.

10. A, B, C, D ஒரு முழு நாற்கோணப் புள்ளிகள். △EFG அதன் மூலைப் புள்ளி முக்கோணம். EF, FG, GE எதிர்ப் பக்கங்கள் AB, CD; AD, BC; AC, BD யை P_1, Q_1; P_2, Q_2; $P_3 Q_3$ இல் வெட்டுகின்றன. P_1Q_1, $P_2 Q_2$, $P_3 Q_3$ இவற்றின் மையப் புள்ளிகள் ஒரு நேர்கோடமைவன என நிரூபிக்கவும்.

11. இரண்டு வட்டங்கள், அவற்றின் வடிவொப்பு வட்டம் இவை உள்ள ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியின் எல்லைப் புள்ளிகள் கண்டுபிடிக்க ஒரு வரைமுறை எழுதுக.

பயிற்சிகள் செய்ய சில உதவிக் குறிப்புகள்

1. ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியிலுள்ள வட்டங்களைக் குத்தாக வெட்டும் வட்டங்கள்.

1. அவை எல்லைப் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும்.

2. அவற்றின் மையங்கள் பொது அச்சில் இருக்கும். ஆரங்கள் மையத்திலிருந்து ஒரு வட்டத்துக்கு வரைந்த தொடு கோட்டின் நீளம்.

3. அவற்றின் மையங்கள் பொது அச்சில் இருக்கும். ஆரம் $= PL_1$ அல்லது PL_2 ஆகும்.

4. இரண்டு வட்டங்களின் பொதுத் தொடுகோட்டை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் எல்லா ஓரச்சு வட்டங்களையும் குத்தாக வெட்டும்.

5. இரண்டு வட்டங்களைக் குத்தாக வெட்டினால் எல்லா வட்டங்களையும் குத்தாக வெட்டும்.

∴ ஏதாவது இரண்டு வட்டங்களைக் குத்தாக வெட்டுகிறதா என்று பாருங்கள்.

2. எல்லைப் புள்ளிகள் எங்கே?

1. அவை வட்ட மையங்கள் நேர்கோட்டில் இருக்கும்.

2. மையங்கள் நேர்கோட்டில் எல்லா வட்டங்களுக்கும் தன் மாற்றுப் புள்ளிகள்.

3. ஓரச்சு வட்டங்களுக்குக் குத்து ஓரச்சு வட்டங்கள் வெட்டும் இரண்டு புள்ளிகள் எல்லைப் புள்ளிகள்.

4. இரண்டு வட்டங்களின் மையங்கள் அவற்றின் வடிவொப்பு வட்டத்தைச் சேர்ந்த ஒரு ஓரச்சு வட்டத் தொகுதிக்கு எல்லைப் புள்ளிகள்.

மூன்று வட்டங்கள் ஓரச்சு வட்டங்கள் என நிரூபிப்பது எப்படி?

1. (1) வட்டங்களின் மையங்கள் ஒரு கோட்டில் உள்ளன.

(2) ஒரு வட்டம் மூன்று வட்டங்களையும் குத்தாக வெட்டும்.

2. 3 வட்டங்களுக்கும் ஒரு ஜதைப் புள்ளிகள் எல்லைப் புள்ளிகள் உண்டா என்று பார்க்கவும்.

3. 3 வட்டங்களுக்கும் பொது அச்சு உண்டு. (radical axis)

4. இரண்டு புள்ளிகளின் வர்க்கங்கள் 3 வட்டங்களுக்கும் சமம். (புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோடு சமத் தொடு கோட்டச்சு).

5. (1) ஒரு புள்ளியின் வர்க்கங்கள் மூன்று வட்டங்களுக்கும் சமம்

(2) வட்ட மையங்கள் ஒரு நேர் கோடமைவன. சமத் தொடுகோட்டச்சு அப்புள்ளியிலிருந்து வட்ட மையங்கள் நேர் கோட்டுக்குக் குத்துக் கோடு

6. வட்டங்கள் இரண்டு புள்ளிகளில் வெட்டினால் ஓரச்சு வட்டங்கள்.

7. (1) அவை ஒரு புள்ளியில் வெட்டினால்

(2) அவற்றின் மையங்கள் ஒரு நேர்க்கோட்டில் அமைந்தால் வட்டங்கள் ஓரச்சு வட்டங்கள்.

8. ஒரு ஜதைப் புள்ளிகள் மூன்று வட்டங்களுக்கும் தன் மாற்றுப் புள்ளிகளானால் அவை ஓரச்சு வட்டங்கள்.

9. இரண்டு புள்ளிகளிலிருந்து தொடுகோடுகள் சமமா? என்று பார்க்கவும்.

10. ஒரு புள்ளியிலிருந்து தொடுகோடுகள் சமமா? வட்ட மையங்கள் நேர்கோட்டில் உள்ளனவா? என்று பார்க்கவும்.

11. மூன்று வட்டங்களையும் குத்தாக வெட்டும் இரண்டு வட்டங்கள் உண்டா என்று பார்க்கவும்.

12. ஒரு வட்டத்தின் மேல் P ஒரு புள்ளியானால்,

$\frac{PT_1}{PT_2}$ ஒரு மாறிலியா?

13. ஒரு வட்டம் மற்ற இரண்டு வட்டங்களுக்கும் வடிவொப்பு வட்டமா?

14. அவை ஒரு முழு நாற்கரத்தின் மூலைவிட்டங்களை விட்டங்களாகக் கொண்டு வரையப்பட்டனவா?

15. அவை மூன்று வட்டங்களை இரண்டிரண்டாக எடுக்க அவற்றின் வடிவொப்பு வட்டங்களா?

16. ஒரு ஜதை புள்ளிகள் மூன்று வட்டங்களுக்கும் துணையியப் புள்ளிகளா (conjugate points)?

இரண்டு அல்லது மேற்பட்ட வட்டங்களுக்கு சமத் தொடு கோட்டச்சு (radical axis) கண்டுபிடிப்பது எப்படி?

1. இரண்டு புள்ளிகளின் வர்க்கங்கள் சமமானால், அவற்றைச் சேர்க்கும் நேர்கோடு.

2. ஒரு புள்ளியின் வர்க்கங்கள் சமமானால், அதிலிருந்து வட்ட மையங்களை இணைக்கும் நேர்கோட்டுக்கு வரையும் குத்துக்கோடு

3. இரண்டு புள்ளிகளிலிருந்து தொடுகோடுகள் சமமானால் அப்புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோடு.

4. ஒரு புள்ளியிலிருந்து தொடுகோடுகள் சமமானால் அதிலிருந்து வட்ட மையங்களுக்குக் குத்துக்கோடு.

5. பொதுத் தொடுகோடுகளின் மையப் புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோடு.

6. எல்லைப் புள்ளிகளின் நடுக் குத்துக்கோடு.

7. எல்லைப் புள்ளியிலிருந்து வட்டங்களுக்கு வரையும் தொடுகோடுகளின் நடுப்புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோடு.

8. வட்டங்களுக்கு இரண்டு புள்ளிகள் துணையியப் புள்ளிகளானால் அவற்றை இணைக்கும் நேரட்டின் மையப் புள்ளியிலிருந்து O_1O_2 க்குக் குத்துக்கோடு.

9. வட்டங்களைக் குத்தாக வெட்டும் இரண்டு வட்டங்களின் மையங்களைச் சேர்க்கும் கோடு.

10. வட்டங்களைக் குத்தாக வெட்டும் ஒரு வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து மையங்கள் நேர்கோட்டுக்குக் குத்துக்கோடு.

11. வெட்டும் வட்டங்களின் பொது நாண்.

பல்வகைக் கணக்குகள்

பயிற்சி 20

1. இரண்டு வட்டங்கள் L_1, L_2 எல்லைப் புள்ளிகளாக உடைய ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியைச் சேர்ந்தவை. ஒரு நேர்கோடு ஒரு வட்டத்தை P யில் தொடுகிறது. இரண்டாவது வட்டத்தை Q, R இல் வெட்டுகிறது. $\angle Q\ L\ P$ யும், $\angle QLR$ உம் சமம் அல்லது மிகைநிரப்பிகள் என்று நிரூபிக்கவும்.

2. இரு வட்டங்களின் சமத் தொடுகோட்டச்சில் ஒரு புள்ளியிலிருந்து PT, PT' என்னும் தொடுகோடுகள் வரையப்பட்டிருக்கின்றன. TT', வட்டங்களின் ஒரு வடிவொப்பு மையத்தின் வழிச் செல்லும் என நிரூபிக்க.

3. இரு வட்டங்களின் வடிவொப்பு வட்டம், அந்த வட்டங்களின் மையங்களை எல்லைப் புள்ளிகளாகக் கொண்ட ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியைச் சேர்ந்தது என நிரூபிக்கவும்.

இவற்றின் பொது அச்சு கண்டுபிடிக்கவும். இரண்டு வட்டங்களும், வடிவொப்பு வட்டம் இவை உள்ள ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியின் பொது அச்சு கண்டுபிடிக்கவும். இவை இரண்டும் ஒன்ரு? இல்லையேல் விளக்கம் கூறுக.

4. △ ABC யில் I உள்வட்ட மையம். I_1, A க்கு எதிரே யுள்ள வெளி வட்ட மையம். உள் வட்டமும் எதிர் வட்டமும் BC யை, முறையே X, X_1 இல் தொடுகின்றன. AX, வெளி வட்டத்தை P, Q வில் வெட்டுகிறது. $X_1 Q$ வெளி வட்டத்தின் விட்டம் என்று நிரூபிக்கவும்.

6. △ ABC யில் உள் வட்டம் பக்கங்கள் BC, CA, AB யை X, Y, Z இல் தொடுகிறது. YZ, ZX, XY முறையே BC, CA, AB யை X_1, Y_1, Z_1 இல் வெட்டுகின்றன. XX_1, YY_1, ZZ_1 இவற்றின் மையப் புள்ளிகள் சுற்று வட்டம், உள் வட்டம் இவற்றின் சமத் தொடு கோட்டச்சில் உள்ளன என்று நிரூபிக்கவும்.

7. இரண்டு வட்டங்களின் விட்டங்கள் AB, CD யின் முனைகளைச் சேர்க்கும் AC, BD இணைகோடுகள். AD முதல் வட்டத்தை E யிலும் இரண்டாவது வட்டத்தை F இலும், BC, முதல் வட்டத்தை G யிலும் இரண்டாவது வட்டத்தை H இலும் வெட்டுகின்றன. $AGFC$, $BEHD$, $BGFD$, $AEHC$ இவை வட்ட நாற்கரங்கள் என நிரூபிக்கவும்.

8. ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியிலுள்ள வட்டங்களுக்கு ஒரு எல்லைப் புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் தொடுகோடுகளை அவற்றின் பொது அச்சு இரு சமக் கூறிடுகிறது என நிரூபிக்கவும்.

9. △ ABC யின் குத்துச் சந்தி, AD, BE, CF இவை வழிச் செல்லும் எல்லா வட்டங்களுக்கும் அச்சுச் சந்தியும் ஆகும் எனக் காட்டுக.

10. ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியிலுள்ள வட்டங்களுக்கு ஒரு புள்ளியின் போலார்களை அப்புள்ளியையும் வட்ட மையத்தையும் சேர்க்கும் கோடுகள் வெட்டும் புள்ளிகளின் நியமப்பாதை என்ன?

11. வேருெரு தனி வட்டத்துக்கும் ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியிலுள்ள வட்டங்களுக்கும் தனித்தனியே சமத்தொடு கோட்டச்சுகள் வரைந்தால் அவை ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியின் பொது அச்சில் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் எனக் காட்டுக.

12. $\triangle ABC$ யில், கோணங்கள் A, B, C யின் இரு சம வெட்டிகள் BC, CA, AB யை A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2 இல் வெட்டுகின்றன. A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 விட்டங்களாகவுடைய வட்டங்கள் ஓரச்சு வட்டங்கள் என நிருபிக்கவும. (உதவிக் குறிப்பு தேற்றம் 43 போல)

13. இரு வட்டங்களின் சமத் தொடுகோட்டச்சில் ஒரு புள்ளியின் போலார்கள் சமத் தொடுகோட்டச்சிலேயே சந்திக்கின்றன என நிருபிக்கவும். (செ. ப)

14. A, B இரு வட்டங்கள். L அவற்றின் ஒரு எல்லைப்புள்ளி A, B யில் P, Q என்னும் புள்ளிகள் $\angle PLQ$ ஒரு செங்கோணமாக இருக்கும்படி நகருகின்றன. L இலிருந்து AB க்கு வரையப்பட்ட குத்துக்கோட்டின் அடி (foot of the perpendicular) N இன் நியமப் பாதை A, B யுடன் ஓரச்சு வட்டம் என நிருபிக்கவும்.

15. ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் BC, CA, AB யில் A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2 என்னும் புள்ளிகள் இருக்கின்றன. AA_1, BB_1, CC_1 ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள். $B_1C_1A_2$, $C_1A_1B_2$, $A_1B_1C_2$ நேர்கோடுகள்.

(1) A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 இன் நடுப் புள்ளிகள் ஒரு கோடமைவன என்றும்

(2) அவற்றை விட்டங்களாகக் கொண்ட வட்டங்கள் ஓரச்சு வட்டங்கள் எனவும் நிருபிக்கவும். (செ. ப)

16 மூன்று வட்டங்களை இரண்டிரண்டாக எடுக்க அவற்றின் சமத் தொடு கோட்டச்சுகள்,

(1) தனித்தனியான இணைகோடுகள் அல்லது

(2) ஒரு புள்ளியைப் பொதுவாக உடையன அல்லது

(3) எல்லாப் புள்ளிகளையும் பொதுவாக உடையன என்று நிருபிக்கவும்.

கொடுக்கப்பட்ட 2 ஜதை புள்ளிகளில் ஒவ்வொரு ஜதையுடனும் ஒரே வட்டப் பரிதியிலுள்ள இரண்டு புள்ளிகளை ஒரே வட்டத்தின் மேல் கண்டுபிடிக்கவும். எப்பொழுது ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட ஜதைப் புள்ளிகள் கிடைக்கும் என்பதையும், எத்தனை ஜோடி புள்ளிகள் கிடைக்கலாம் என்பதையும் நிருபிக்கவும். (செ. ப.)

17. ஒரு கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி P யிலிருந்து, ஒரு ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியிலுள்ள எந்த வட்டத்துக்கும் P யின் போலாருக்கு வரையப்பட்ட குத்தடி (foot of perpendicular) யின் நியமப்பாதை குத்து வட்டத் தொகுதியில் P வழிச் செல்லும் வட்டம் என நிரூபிக்கவும்.

(Show that the locus of the foot of perpendicular from a given point P to its polar with respect to any circle of a coaxal system is a circle of the orthogonal system passing through P.)
(செ. ப.)

18. OP, OP' ஒரு வட்டத்துக்கு O விலிருந்து தொடுகோடுகள். OP, OP' ஐ இரு சமக் கூறிடும் கோடு RR' இல் T ஒரு புள்ளி. T யின் போலார் RR' ஐ Q வில் வெட்டுகிறது. $\angle TOQ = 90°$ என நிரூபிக்கவும். (செ. ப)

19. $\triangle ABC$ யில் A யின் உள்ளிரு சம வெட்டி BC யை D யில் வெட்டுகிறது. AD யை விட்டமாகவுடைய வட்டம் உள்வட்டம், A க்கு எதிரேயுள்ள வெளி வட்டம் இவற்றுடன் ஓரச்சுடையது என நிரூபிக்கவும்.

20. ஒரு ஓரச்சு வட்டத் தொகுதிக்கு O, O' எல்லைப் புள்ளிகள். A ஏதாவது ஒரு புள்ளி. ஏதாவது ஒரு வட்டத்துக்கு A யின் தொடுநாண் $\odot AOO'$ இன் A வழியே செல்லும் விட்டத்தின் எதிர் முனை வழியே செல்லும் என நிரூபிக்கவும். (செ. ப)

21. இரண்டு வட்டங்களின் பொதுத் தொடுகோட்டை அவற்றுடன் ஓரச்சுள்ள எந்த வட்டமும் இசையாக வெட்டுகிறது என நிரூபிக்கவும். (செ. ப)

22. A, B, C ஓரச்சு வட்டங்கள்; L ஏதாவது மற்றொரு வட்டம். A, L; B, L; C, L இவற்றின் சமத் தொடுகோட்டச்சுகள் ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள் என நிரூபிக்கவும்.

V. தன்மாற்றம்

(Inversion)

வரையறை

தன்மாற்றுப்புள்ளிகள்

O மையமாகவும் r ஆரமாகவும் கொண்ட ஒரு வட்டத்தில் O வழிச் செல்லும் ஒரு நேர் கோட்டில் $OP \cdot OP' = r^2$ இருக்கும்படி P, P' என்னும் புள்ளிகள் அமைந்தால் அவை தன் மாற்றுப் புள்ளிகள் எனப்படும், என்பதை முன்பே படித்தோம்.

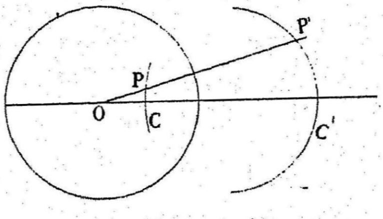
P, P' இன் தன் மாற்றுப்புள்ளி ஆனல்

P', P இன் தன் மாற்றுப் புள்ளி ஆகும்.

வட்டம் (O), தன்மாற்று வட்டம் எனப்படும்.

ஆரம் r, தன்மாற்றி வட்ட ஆரம் எனப்படும்.

மையம் O, தன்மாற்றி வட்ட மையம் அல்லது தன் மாற்றி மையம் எனப்படும்.



V படம் (1)

P ஒரு உருவப் படத்தின் மேல் நகர்ந்தால்

P' இன்னொரு உருவப்படம் உண்டாக்கும்.

P நகரும் உருவப்படத்தை C என்றல்,

P' நகரும் உருவப்படம் C' என்போம்.
C', யின் C யின் தன் மாற்று வரை என்போம்.
C', C யின் தன் மாற்று வரை ஆனால்,
C, C' இன் தன் மாற்று வரை ஆகும்.

2. தன் மாற்று வரைகள்

1. $OP \cdot OP' = r^2$ ஆகையால், OP', OP யின் எதிர் விகித சமத்தில் மாறுகிறது. OP, O வை நெருங்கினால், OP', O விலிருந்து அதிக தூரத்தில் செல்லும்.

2. என்றாலும் C யில் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் ஒரு தன்மாற்றுப் புள்ளி C' இல் உண்டு. C, C' இல் உள்ள புள்ளிகளுக்கு ஒன்றுக்கொன்று ஒப்புமை உண்டு. (One to one correspondence) C' இல் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் C யில் ஒரு தன் மாற்றுப் புள்ளி உண்டு.

3. மேலும் வட்டத்தின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளியின் தன் மாற்றுப் புள்ளி அதுவே. வட்டத்தின் உள்ளிருக்கும் புள்ளிகளுக்குத் தன் மாற்றுப்புள்ளிகள் வெளியே இருக்கும்.

$\because \quad OP \cdot OP' = r^2$

$OP < r$ ஆனால்

$OP' > r$ ஆகும்.

வட்டத்தின் வெளியே இருக்கும் புள்ளிகளின் தன் மாற்றுப் புள்ளிகள் வட்டத்தின் உள்ளே இருக்கும்.

4. தன் மாற்றி மையத்தின் தன்மாற்றுப் புள்ளி எட்டாப் புள்ளியாகும். (Point at infinity)

$OP.OP' = r^2$

$OP = O$, என்றால், $OP' = \infty$ ஆகும்.

தன்மாற்று வரைப் பண்புகள் : (Properties of inverse curves)

1. $OP' = \dfrac{r^2}{OP}$.

$\therefore$ OP கொடுத்திருக்க, OP', r^2 இன் நேர்விகிதத்தில் மாறுகிறது. r அதிகமானால் OP' அதிகமாகும். r குறைந்தால் OP' சிறியதாகும். ஆனால் உருவப்படம் அல்லது வரையின் பண்புகள் மாறாது. அளவு மட்டும்தான் மாறும். அதாவது தன் மாற்றி வட்ட ஆரம் மாறினால், தன் மாற்று வரையின் அளவு மாறுமேயல்லாது அதன் வடிவமோ மற்ற பண்புகளோ

மாருது. இந்த அத்தியாயத்தில் நாம் வரைகளின் பண்புகளைப் பற்றிப் மட்டும் பார்ப்போம் ஆதலால் தன் மாற்றி வட்டத்தின் ஆரத்தைப் பற்றி சொல்லாமல், தன் மாற்றி வட்ட மையத்தை மட்டுமே குறிப்பிட்டுச் சொல்வோம். தன் மாற்றி வட்டம் (O) வைப் பொருத்து. C, C' தன் மாற்று வரைகள் என்பதற்குப் பதிலாக தன் மாற்றி வட்டமையம் O வுக்கு C, C' தன் மாற்று வரைகள் என்போம். அல்லது சுருக்கமாக 'O வுக்கு, C, C' தன் மாற்று வரைகள்'; 'O வுக்கு C யின் தன் மாற்று வரை C'' என்போம்

சில வரைகளை அல்லது உருவங்களைத் தன் மாற்றம் செய்தால் வேறு சில வரைகள் அல்லது உருவங்கள் கிடைக்கும். புதிதாகக் கிடைத்த படத்தில் சில பண்புகள் எளிதில் புலனுகும். அவற்றை எளிதில் நிரூபிக்கவும் முடியும். அதே பண்புகளை முதலில் உள்ள படத்தில் நிரூபிப்பது கடினமாக இருக்கலாம். ஆகவே இங்கு இப்படிச் சில முடிவுகளை தன் மாற்றம் செய்து கிடைக்கக்கூடிய படத்தில் எளிதில் நிரூபித்துக்காட்டும் முறைகளைப் படிப்போம்.

இப்படி ஒரு படத்தை ஒரு புள்ளியைப் பொருத்து தன் மாற்றம் செய்து வேறொரு படத்தை அடையும் முறைக்கு தன் மாற்றம் (Invertion) (இன்வெர்ஷன்) என்று சொல்கிறோம்.

தன்மாற்று வரைகளின் சில எளிய பண்புகள்

தன்மாற்றுப் புள்ளிகளையும், வரைகளையும் (1) குறியிட்டுக் காட்டுவோம்.)

1. ஒரு புள்ளி இரண்டு கோடுகளின் வெட்டுப் புள்ளியானல், அதன் தன் மாற்றுப்புள்ளி, இரண்டு கோடுகளின் தன் மாற்று வரைகளின் வெட்டுப் புள்ளியாகும்.

C_1, C_2 என்னும் கோடுகள் P யில் வெட்டினல், $C^{1\prime}, C'_2,$ P' இல் வெட்டும்.

2. இரண்டு *கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் வெட்டினல் அவற்றின் தன் மாற்று வரைகளும் ஒரு புள்ளியில் வெட்டும்.

3. இரண்டு *கோடுகள் வெட்டவில்லையென்ருல் அவற்றின் தன்மாற்று வரைகளும் வெட்டாது.

4. தன் மாற்றி வட்டத்தின் தன் மாற்று வரை அதுவே.

5. தன் மாற்றி மையத்தின் வழிச் செல்லும் கோட்டின் தன் மாற்றுவரை அதுவே.

*நேர்கோடுகள் என்று கொள்ளற்க.

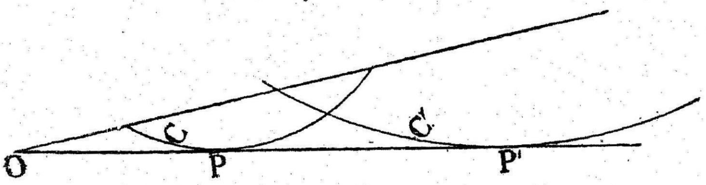
($OP \cdot OP' = r^2$. $P_1 P'$ இரண்டும் OP என்ற கோட்டில் உள்ளன)

6. இரண்டு வளைகோடுகள் ஒரு புள்ளியில் தொட்டால் அவற்றின் தன் மாற்று வரைகளும் ஒரு புள்ளியில் தொடும்.

(இரண்டு வளைகோடுகள் அடுத்தடுத்த புள்ளியில் வெட்டுவதாகக் கொண்டால், அவற்றின் தன்மாற்று வரைகளும் இரண்டு அடுத்தடுத்த புள்ளிகளில் வெட்டும்.)

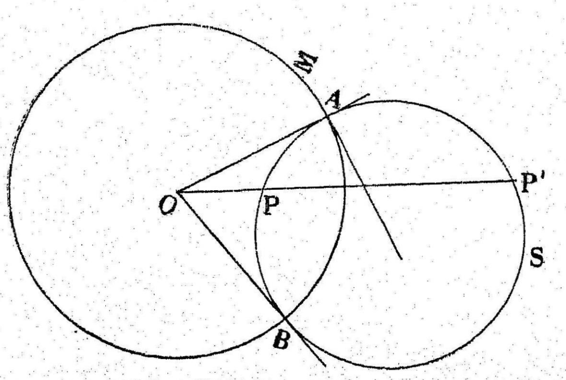
7. தன்மாற்றி மையம் வழிச் செல்லும் ஒரு நேர்கோடு ஒரு வளைவரையைத் (curve) தொட்டால் அதே கோடு வளைவரையின் தன்மாற்று வரையையும் தொடும்.

(அந்த நேர்கோட்டின் தன்மாற்று வரை அதுவே.
∴ அது வளைகோட்டின் தன்மாற்று வரையைத் தொடுகிறது)
OP, C யை P யில் தொட்டால்,
OP, C' ஐ P' இல் தொடும்). (படம் 2 பார்க்கவும்)



V படம் 2

8. S என்னும் வட்டத்தை O மையமாகவும் அதிலிருந்து வரையப்பட்ட தொடுகோடுகள் ஆரமாகவும் கொண்ட ஒரு வட்டத்துக்குத் தன்மாற்றம் செய்தால் அதன் தன்மாற்று வரை S தான்.



V படம் 3

நிருபணம் : OA, OB தொடுகோடுகள். O மையமாகவும் OA ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டம் தன் மாற்றி வட்டம். A, B யின் தன் மாற்றுப் புள்ளிகள் அவையே.

O வழி, OPP' வட்டத்தை P, P' இல் வெட்டும்படி வரைந்தால் $OP.OP' = OA^2 = r^2$.

$\therefore$ P யின் தன்மாற்றுப் புள்ளி P'.

P' இன் தன் மாற்றுப்புள்ளி P.

$\therefore$ வட்டத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியின் தன் மாற்றுப் புள்ளியும் அதே வட்டத்தில் அமைவதைக் காண்க.

9. O விலிருந்து Sக்கு வரையப்பட்ட தொடுகோடு OA, $\sum$ வின் ஆரமாகிறது.

$\therefore \sum \perp S$.

$\therefore$ ஒரு வட்டத்தை அதைக் குத்தாக வெட்டும் ஒரு வட்டத்துக்குத் தன்மாற்றம் செய்தால் அதன் தன்மாற்று வட்டம் அதுவே.

$\therefore$ ஒரு வட்டத்தை அதே வட்டமாகத் தன்மாற்றம் செய்ய அதைக் குத்தாக வெட்டும் எந்த வட்டத்தையும் தன் மாற்றி வட்டமாகக் கொள்ளலாம்.

10. ஏதாவது இரண்டு வட்டங்களை அதே வட்டங்களாகத் தன்மாற்றம் செய்யலாம்.

(இரண்டு வட்டங்களையும் குத்தாக வெட்டும் ஒரு வட்டத்தைத் தன்மாற்றியாகக் கொள்க.)

11. ஏதாவது மூன்று வட்டங்களை அதே வட்டங்களாகத் தன்மாற்றம் செய்யலாம்.

(மூன்று வட்டங்களையும் குத்தாக வெட்டும் வட்டம் அச்சுச் சந்தியை மையமாகவும், அதிலிருந்து வட்டங்களுக்குத் தொடுகோடுகளை ஆரமாகவும் கொண்டது. இதைத் தன்மாற்றி வட்டமாகக் கொள்க.)

12. ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியை அப்படியே தன்மாற்றம் செய்யலாம்.

(எல்லா வட்டங்களையும் குத்தாக வெட்டும் ஒரு வட்டத்தைத் தன்மாற்றிவட்டமாகக் கொள்க.)

13. ஒரு வட்டத்துக்கு அதே மையமுள்ள ஒரு வட்டத்தின் தன்மாற்று மற்றொரு பொது மைய வட்டமாகும். (concentric circle)

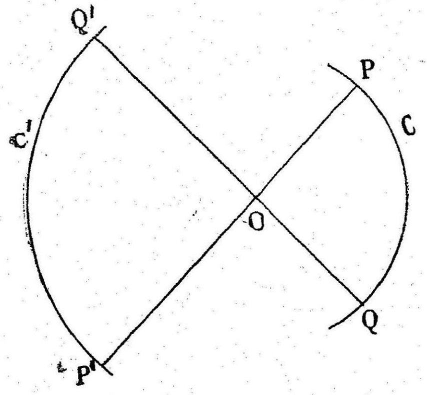
9. $OP \cdot OP' = r^2$.

$OP. OP'$ பாஸிடிவ் ஆனால் r க்கு உண்மை மதிப்பு உண்டு.

$OP. OP'$ நெகடிவ் ஆனால் r கற்பனை எண். ∴ வட்டம் கற்பனை வட்டம்.

அப்பொழுது P, P' தன் மாற்றி மையத்துக்கு எதிர் திசைகளில் இருக்கும்.

∴ $OP. OP'$ எதிரெண் (negative) என்றால் தன் மாற்றி வட்டம் கற்பனை வட்டம் என்றாலும் தன் மாற்றுப் புள்ளிகளும் வரைகளும் கிடைக்கும்.



V படம் 4

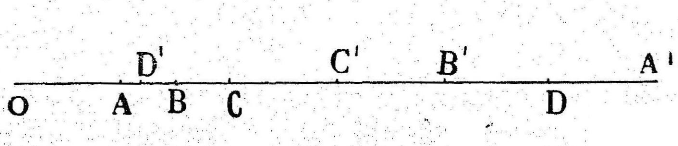
$OP. OP' = -r^2$., $OQ \cdot OQ' = -r^2$

∴ P, P'; Q, Q' தன் மாற்றுப் புள்ளிகள்.

C, C' தன் மாற்று வரைகள்.

10. ஒரு வரிசையின் தன் மாற்றம்

(1) $ABCD$ ஒரு புள்ளி வரிசை. அதிலுள்ள புள்ளிகள் A, B, C, D யின் தன் மாற்றுப் புள்ளிகள் அக்கோட்டில் O என்னும் புள்ளியைப் பொருத்து, A', B', C', D' என்றால், $(ABCD) = (A'B'C'D')$.



V படம் 5

நிருபணம் :

தன் மாற்றி மையம் அதே புள்ளி வரிசையில் இருந்தால் A, B, C, D யின் தன் மாற்றுப் புள்ளிகள் A', B', C', D' அதே நேர்கோட்டில் அமையும்.

$$(A'B'C'D') = \frac{A'B' \cdot C'D'}{A'D' \cdot C'B'}.$$

$$OA \cdot OA' = r^2., \quad OB \cdot OB' = r^2$$

$$\therefore \; OA' = \frac{r^2}{OA}. \quad OB' = \frac{r^2}{OB}.$$

$$\therefore \; A'B' = OB' - OA'$$

$$= r^2 \left(\frac{1}{OB} - \frac{1}{OA} \right)$$

$$= \frac{r^2}{OA \cdot OB} \cdot (OA - OB)$$

$$= \frac{r^2 \cdot BA}{OA.OB}.$$

அதுபோலவே

$$B'C' = \frac{r^2 \cdot CB}{OB \cdot OC}.$$

$$C'D' = \frac{r^2 \cdot DC}{OC \cdot OD}.$$

$$D'A' = \frac{r^2 \, AD}{OD.OA}.$$

$$\therefore \; \frac{A'B' \cdot C'D'}{A'D' \cdot C'B'} = \frac{\dfrac{r^2 \; B.A}{OA.\,OB} \cdot \dfrac{r^2. \; DC}{OD \cdot OC}}{\dfrac{r^2. \; DA}{OA \cdot OD} \cdot \dfrac{r^2 . \; BC}{OB \cdot OC}}$$

$$= \frac{BA \cdot DC}{DA \cdot BC}$$

$$= \frac{AB \cdot CD}{AD \cdot CB}.$$

$$= (ABCD)$$

(2) $ABCD) = -1$ என்றால், $(A'B'C'D') = -1$.

(3) தன்மாற்றி மையம் $O \cdot O$, A_1B, C ஹார்மோனிக் புள்ளி வரிசை என்றால்

$$(OABC) = -1.$$

O வின் தன்மாற்றுப்புள்ளி எட்டாப்புள்ளியாகும்.

$\therefore A', B', C'$, எட்டாப்புள்ளி இவை இசைப்புள்ளி வரிசை.

$\therefore A' B = B' C'$.

தேற்றம் 45

ஒரு நேர்கோட்டின் தன் மாற்றுவரை ஒரு நேர்கோடு அல்லது தன்மாற்றிமையம் வழிச் செல்லும் ஒரு வட்டம் ஆகும்.

1. நேர்கோடு தன்மாற்றி மையம் வழிச் செல்லட்டும்.

V படம் 6

OA கொடுக்கப்பட்ட நேர்கோடு. O தன்மாற்றி மையமாக இருக்கட்டும்.

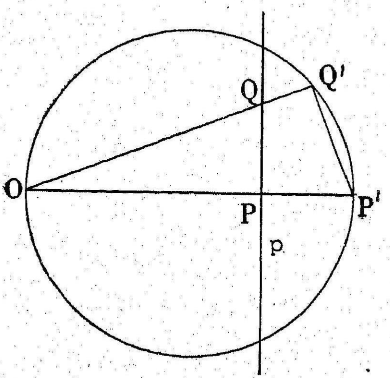
A_1 இன் தன்மாற்றுப்புள்ளி அதே நேர்கோட்டில் உள்ள A_1' ஆகும்.

$\therefore$ ஒவ்வொரு புள்ளியின் தன்மாற்றுப் புள்ளியும் அதே நேர்கோட்டில் அமைகிறது.

$\therefore OA$ யின் தன்மாற்று வரை OA தான்.

$\therefore$ அது ஒரு நேர்கோடு.

2. நேர்கோடு தன்மாற்றி மையம் வழிச் செல்லவில்லை என்றால் அதன் தன்மாற்று வரை ஒரு வட்டமாகும்.



V படம் 7

கொள்கை

கொடுக்கப்பட்ட கோடு P என்போம். தன்மாற்றி மையம் O, P யில் இல்லை.

நிரூபிக்க:

P யின் தன்மாற்று வரை ஒரு வட்டம் என.

நிரூபணம்: O வழியே p க்கு ஒரு செங்குத்துக் கோடு வரைக.

அது p யை P வெட்டட்டும். P யின் தன்மாற்றுப் புள்ளி P' ஆகட்டும். Q, p யில் ஏதாவது ஒரு புள்ளி ஆகட்டும்.

Q_1, Q வின் தன்மாற்றுப்புள்ளி ஆகும்.

$OP \cdot OP' = r^2. = OQ \cdot OQ'$.

$\therefore P, P', Q, Q'$ ஒரு வட்டப் பரிதியில் உள்ளன.

ஆனல் $\angle OPQ = 90°$ (வரைதல்படி)

$\therefore \angle OQ'P' = 90°$.

மேலும் $OP \perp p$ ஆனதால்

P ஒரு நிலைத்த புள்ளி.

$\therefore P'$ ஒரு நிலைத்த புள்ளி.

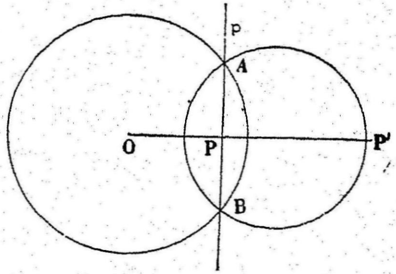
$\therefore Q'$ OP' ஐ விட்டமாகவுடைய வட்டத்தில் இருக்கிறது.

$\therefore p$ யின் தன்மாற்று வரை OP' ஐ விட்டமாகவுடைய வட்டம்.

கிளைத் தேற்றங்கள்

1. கொடுக்கப்பட்ட நேர்கோடு அதன் தன்மாற்று வரையான வட்டத்துக்கும், தன்மாற்றி வட்டத்துக்கும் சமத் தொடுகோட்டச்சு ஆகும்.

(1) p, தன்மாற்றி வட்டத்தை வெட்டினல்.



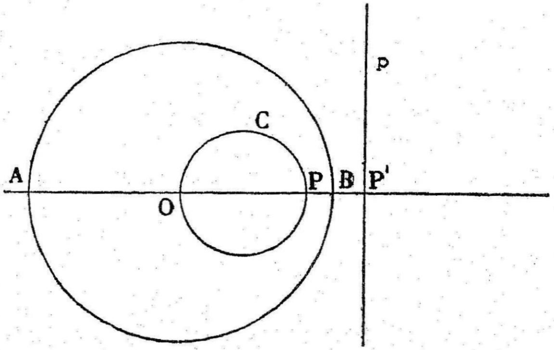
V படம் 8

தன் மாற்றி வட்டம், வட்டம் (O) ஆகட்டும். p அதை A, B யில் வெட்டினல், A, B தன்மாற்றிப் புள்ளிகள் அவையே.

∴ p யின் தன்மாற்று வரை O, A, B வழிச் செல்லும் வட்டமாகும்.

∴ AB, வட்டம் (O) க்கும், தன்மாற்று வரைக்கும் பொது நாண். அல்லது சமத் தொடுகோட்டச்சு.

(2) p, தன்மாற்றி வட்டத்தை வெட்டவில்லையென்றால்



V படம் 9

O தன்மாற்றி மையம், p கொடுக்கப்பட்ட கோடு என்போம். p யின் தன்மாற்று வரை OP' ஐ விட்டமாகவுடைய வட்டம்.

OP, தன்மாற்றி வட்டத்தை A, B யில் வெட்டட்டும்.

P, P' தன்மாற்றுப் புள்ளிகள்.

∴ $(AB, P'P) = -1$.

$$\begin{aligned} PB \cdot PA &= (PO-OB)\,(PO+OB) \\ &= PO^2-OB^2 \\ &= PO^2-OP \cdot OP' \quad (OB^2 = OP \cdot OP') \\ &= PO\,(PO-OP') \\ &= PO \cdot PP'. \end{aligned}$$

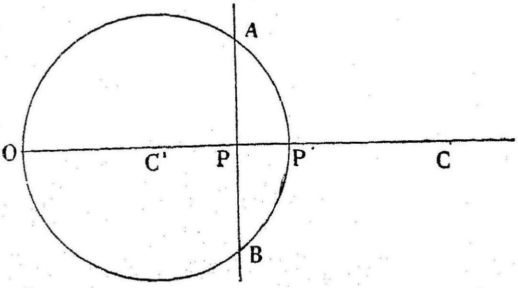
∴ AB, OP' விட்டங்களாகவுடைய வட்டங்களுக்கு P யின் வர்க்கங்கள் சமம்.

∴ P சமத் தொடுகோட்டச்சில் உள்ளது.

∴ p, OP க்குக் குத்துக்கோடு.

∴ p சமத் தொடுகோட்டச்சு.

2. தன்மாற்றி மையம் O வைப் பொருத்து ஒரு நேர் கோட்டின் தன்மாற்று வரையான வட்டத்தின் மையம் அந்த நேர்கோட்டில் O வின் பிம்பத்தின் தன்மாற்றுப் புள்ளியாகும்.



V படம் 10

கொடுக்கப்பட்ட நேர்கோடு AB; $OP \perp AB$.

P யின் தன்மாற்றுப் புள்ளி P'.

$\therefore$ AB யின் தன்மாற்று வரை, வட்டம் $OAP'B$.

அதன் மையம் C' என்போம்.

C, AB யில் O வின் பிம்பமாகட்டும்.

(அ–து) $OP = PC$.

இப்பொழுது $OP \cdot OP' = r^2$.

ஆனால் $OP' = 2\,OC'$.

$OP = \frac{1}{2}\,OC$.

$\therefore\ OP \cdot OP' = 2\,OC' \cdot \frac{1}{2}\,OC = OC.OC'$.

$\therefore$ C', C யின் தன்மாற்றுப் புள்ளி.)

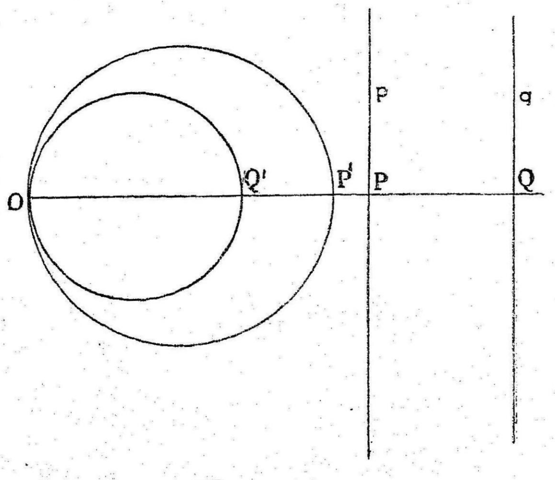
3. இரண்டு வெட்டும் நேர்கோடுகள் இரண்டு வெட்டும் வட்டங்களாகத் தன்மாற்றப்படும் அவை வெட்டும் புள்ளிகளில் ஒன்று தன்மாற்றிமையம். மற்றொன்று கோடுகள் இரண்டும் வெட்டும் புள்ளியின் தன்மாற்றுப் புள்ளி.

(p, q என்னும் கோடுகள் P யில் வெட்டினால், $p'\ q$ வின் தன்மாற்று வகைகள் O வழிச் செல்லும் 2 வட்டங்கள். A யின் தன்மாற்றுப் புள்ளி P' இரண்டு தன்மாற்றுகளும் வெட்டும் புள்ளியாகும்.)

4. பல ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகளின் தன்மாற்று வரைகள், வெட்டும் ஓரச்சு வட்டங்களாகும். (தன்மாற்றி மையத்தில் வெட்டும் வட்டங்கள்.

அவை அந்தப் புள்ளியின் தன்மாற்றுப் புள்ளியில் மறுபடியும் வெட்டும். ஆகவே அவை வெட்டும் ஓரச்சு வட்டங்களாகும்.

5. இரண்டு இணைகோடுகளின் தன்மாற்று வகைகள் தொடு வட்டங்களாகும்.



V▮படம் 11

p, q இணை கோடுகள்.

O விலிருந்து p, q வுக்கு லம்பமாக p, q வை P, Q வில் வெட்டும்படி OPQ வரைக.

$P' Q$ வின் தன்மாற்றுப் புள்ளிகள் P', Q' ஆகட்டும்.

P', Q', OPQ என்ற கோட்டில் அமையும்.

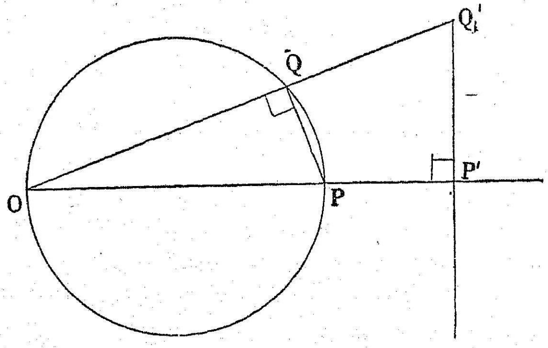
p, q இவற்றின் தன்மாற்று வகைகள் OP', OQ' விட்டங்களாகவுடைய வட்டங்கள்.

ஆனால் $OP'Q'$ ஒரே நேர்கோடு.

$\therefore OP', OQ'$ விட்டங்களாகவுடைய வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று தொடும்.

தேற்றம் 46

தன்மாற்றி மையம் கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்தின் மேல் ஒரு புள்ளியானால், அந்த வட்டத்தின் தன்மாற்று வரை ஒரு நேர்கோடாகும்.



V படம் 12

கொள்கை

தன்மாற்றி மையம் O வழிச் செல்லும் ஒரு வட்டம் தரப் பட்டுள்ளது.

நிரூபிக்க:

அதன் தன் மாற்றுவரை ஒரு நேர்கோடு என.

நிரூபணம்: O வழியே வட்டத்தின் விட்டம் OP வரைக.

Q வட்டத்தில் ஏதாவது ஒரு புள்ளி ஆகட்டும்.

P, Q இவற்றின் தன்மாற்றுப் புள்ளிகள் P', Q' OP, வட்டத்துக்கு O வழிச் செல்லும் விட்டம்.

$\therefore$ P ஒரு நிலைத்த புள்ளி (Fixed Point)

$\therefore$ P' ஒரு நிலைத்த புள்ளி.

$P, P'; Q, Q'$ தன்மாற்றுப் புள்ளிகள்.

$\therefore OP \cdot OP' \quad OQ \cdot OQ' = r^2$.

$\therefore$ P, P', Q, Q' ஒரு வட்டப்பரிதியில் அமைவன.

$\therefore \angle PP'Q' \quad \angle OQP$ (வெளிக் கோணம்)

ஆனால் $\angle OQP = 90°$ (அரை வட்டக் கோணம்)

$\therefore \angle OP'Q' = 90°$.

$\therefore$ P' வழியே OP' க்குச் செங்குத்துக் கோட்டில் Q' இருக்கிறது.

வட்டத்தின் தன்மாற்று வரை $P'Q'$ என்னும் நேர்கோடு.

கிளைத்தேற்றங்கள்

1. இரண்டு வெட்டும் வட்டங்களின் வெட்டும் புள்ளிகளில் ஒன்று தன்மாற்றிமையமானல் வட்டங்களின் தன்மாற்று வரைகள் இரண்டு வெட்டும் கோடுகளாகும். அக்கோடுகள் புள்ளி வட்டங்களின் தன்மாற்றுப் புள்ளியாகும்.

இரண்டு வட்டங்களின் தன்மாற்று வரைகள் நேர்கோடு களானல் அவை தன்மாற்றுப்புள்ளி வழி வரையப்பட்ட விட்டங்களுக்குச் செங்குத்துக் கோடுகளாடும்.

3. பல தொடு வட்டங்களை இணைகோடுகளாகத் தன் மாற்றம் செய்யலாம்.

தொடு புள்ளியைத் (O) தன்மாற்றி மையமாகக் கொள்க. வட்டங்களின் தன்மாற்று வரைகள் O வழியே வரையப்பட்ட விட்டங்களுக்குக் குத்துக் கோடுகள்.

வட்டங்கள் O வில் தொடுவதால், O வழிச் செல்லும் விட்டங்கள் ஒரே நேர்கோட்டிலுள்ளன.

∴ வட்டங்களின் தன்மாற்றுவரைகள் இணைகோடுகள்.

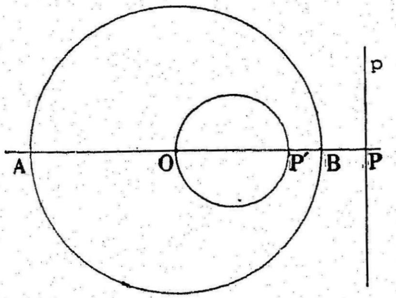
4. ஒரு வட்டத்தின் மேல் உள்ள புள்ளிக்கு அதன் தன் மாற்றுவரை அந்த வட்டத்துக்கும் தன்மாற்றி வட்டத்துக்கும் சமத் தொடுகோட்டச்சு.

(1) வட்டம் C கொடுக்கப்பட்ட வட்டம் என்போம். தன்மாற்றி மையம் O, C யின் மேல் உள்ளது. இவை இரண்டும் AB யில் வெட்டினல் AB வட்டத்தின் தன்மாற்று வரையிலும் இருக்கும். மேலும் தன்மாற்றுவரை ஒரு நேர் கோடு.

∴ அது AB யாகும்.

AB, இரு வட்டங்களுக்கும் பொது நாண் அல்லது சமத் தொடுகோட்டச்சு.

(2) C, வட்டம் (O) வை வெட்டா விட்டால்



V படம் 13

(OP வட்டத்தின் விட்டம் ஆகட்டும்.

P யின் தன்மாற்றுப் புள்ளி P^1 ஆகட்டும்.

(நிரூபணம்—தேற்றம் 45 கிளை 1 போல்)

p_1 வட்டம் (O), வட்டம் C இவற்றின் சமத் தொடு கோட்டச்சு.

5. இரண்டு வெட்டும் வட்டங்களை வெட்டுப்புள்ளிகளில் ஒன்றைத் தன்மாற்றி மையமாகக் கொண்டு தன்மாற்றம் செய்தால், அவற்றின் தன்மாற்று வரைகளின் வெட்டுப்புள்ளி, இரண்டு வட்டங்களுக்கும் தன்மாற்றி வட்டத்துக்கும் சம தொடுகோட்டச்சுச் சந்தியாகும்.

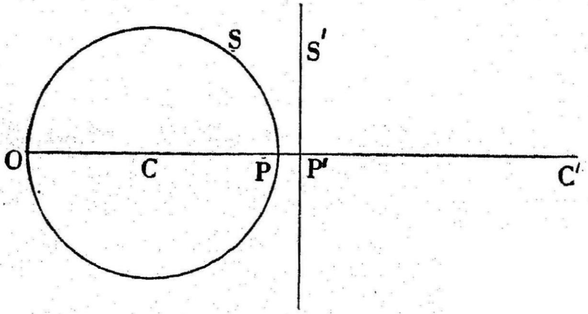
(வட்டங்கள் C, C_1 — O வில் வெட்டுகின்றன. O தன் மாற்றி மையமானல் C_1' C_1' இரு நேர்கோடுகளாகும்.

C'_1, தன்மாற்றி வட்டத்துக்கும் C க்கும் அச்சு.

C_1', ,, ,, C_1 க்கும் அச்சு.

$\therefore$ C, C', வெட்டும் புள்ளி அச்சு சந்தி (Radical centre).

6. ஒரு வட்டத்தை அதன் மேலுள்ள ஒரு புள்ளிக்குத் தன்மாற்றுப்புள்ளி வட்டத்தின் தன்மாற்று வரையான நேர் கோட்டில் தன்மாற்றி மையத்தின் பிம்பம் ஆகும்.



V படம் 14

O தன்மாற்றி மையம்.

S, O வழிச் செல்லும் ஒரு வட்டம்.

C; S இன் மையம்.

OP வட்டத்தின் விட்டம்.

P', P யின் தன் மாற்றுப் புள்ளி.

S', S இன் தன்மாற்று வரையாகட்டும். அது P' வழிச் செல்லும் OP' க்குக் குத்துக் கோடு.

இப்பொழுது $OP \cdot OP' = r^2$.

$$OC = \tfrac{1}{2}\, OP.$$

$$2\,OC\cdot OP' = r^2.$$

$$\therefore\ OC.\,2OP' = r^2.$$

C யின் தன்மாற்றுப்புள்ளி C' ஆனால்

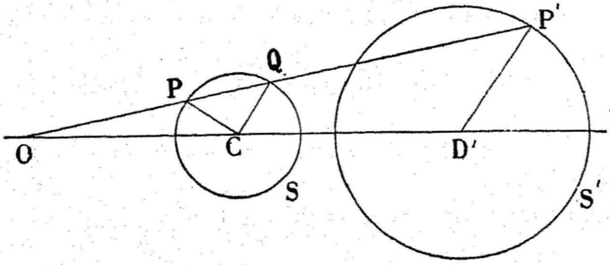
$$OC\cdot OC' = r^2.$$

$$\therefore\ OC' = 2OP'.$$

(அ-து) C', S' இல் O வின் பிம்பம்.

தேற்றம் 47

ஒரு வட்டத்தின் மேல் தன்மாற்றிமையம் இல்லையென்றால், அந்த வட்டத்தின் தன்மாற்றுவரை மற்றொரு வட்டம் ஆகும்.



V படம் 15

கொள்கை:

(1) S என்னும் வட்டம், மையம் C கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.

(2) O தன்மாற்றி மையம்.

நிருபிக்க: S இன் தன்மாற்று வரை மற்றொரு வட்டம் என.

நிருபணம்: O வழியே OPQ என்னும் கோடு வட்டம் S ஐ P,Q வில் வெட்டும்படி வரைக.

P யின் வன்மாற்றுப் புள்ளி P' ஆகட்டும்.

P' வழியே CQ க்கு ஒரு இணைகோடு வரைக. அது OC யின் நீட்சியை D' இல் வெட்டட்டும்.

P, P' தன்மாற்றுப் புள்ளிகள்.

$$\therefore\ OP.OP' = r^2$$

ஆனால் $OP.OQ = t^2$ (t, O விலிருந்து S க்கு வரையப்பட்ட தொடுகோட்டின் நீளம்).

$$\therefore\ \frac{OP'}{OQ} = \frac{r^2}{t^2}\ \text{(மாறிலி)}$$

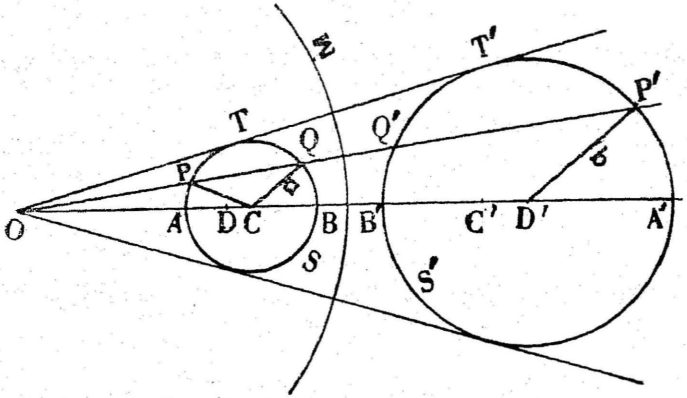
∴ P' இன் நியமப்பாதை D' ஐ மையமாகவுடைய ஒரு வட்டம்.

∴ S இன் தன்மாற்று வரை ஒரு வட்டம்.

குறிப்பு

1. வட்டம் S' இன் மையம், S இன் மையத்தின் தன் மாற்றுப் புள்ளி அல்ல என்பதைக் கவனிக்கவும்.

S' இன் மையம் D' ஆனுல், அது வட்டம் S க்கு O வின் தன்மாற்றுப்புள்ளியின் தன்மாற்று புள்ளியாகும்.



V படம் 16

கொள்கை

O தன்மாற்றி மையம். Σ தன்மாற்றி வட்டம். S', S இன் தன்மாற்று வரையாகட்டும்.

S இன் மையம் C, S' இன் மையப் D' ஆகட்டும்.

வட்டம் S க்கு O வின் தன் மாற்று புள்ளி D ஆகட்டும்.

நிருபிக்க : D', D யின் தன்மாற்றுப் புள்ளி என.

நிருபணம்.

OC, வட்டம் S ஐ A, B யிலும், வட்டம் S' ஐ B', A' இலும் வெட்டட்டும்.

∴ A, A'; B, B' தன்மாற்றுப் புள்ளிகள். வட்டம் S க்கு O, D தன்மாற்றுப் புள்ளிகள். (கொள்கை)

∴ $(OD, AB) = -1$.

∴ இவற்றின் தன்மாற்றுப் புள்ளி வரிசை இசைப் புள்ளி வரிசையாகும். (தன்மாற்று வரைப் பண்புகள்-10 (2))

$\therefore\ (O'D', A'B') = -1.$

$\therefore\ D', A'B'$ இன் மையப் புள்ளி.

$\therefore\ D'$ வட்டம் S' இன் மையப் புள்ளி.

குறிப்பு. அதுபோலவே வட்டம் S' க்கு O வின் தன்மாற்றுப் புள்ளி C' ஆனால், C' இன் தன்மாற்றுப் புள்ளி C வட்டம் S இன் மையமாகும்.

(அ-து) C யின் தன்மாற்றுப் புள்ளி C' என்றால் வட்டம் S' க்கு O, C' தன்மாற்றுப் புள்ளிகள்.

2. இரண்டு வட்டங்கள் வெட்டிக் கொண்டால் அவற்றின் தன்மாற்று வரைகளும் வெட்டிக் கொள்ளும்.

(வெட்டுப் புள்ளிகளின் தன்மாற்றுப் புள்ளிகள் தன் களின் வெட்டுப் புள்ளிகள் ஆகும்.

3. இரண்டு தொடும் வட்டங்களின் தன்மாற்று வரைகள் இரண்டு தொடும் வட்டங்கள் ஆகும்.

(தொடுபுள்ளியின் தன்மாற்றுப் புள்ளி தன்மாற்று வரை மாற்று வரைகளின் தொடுபுள்ளி ஆகும்).

4. தன் மாற்று மையத்திலிருந்து S க்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகள் வட்டம் S' ஐத் தொடும்.

(OT வட்டம் S க்குத் தொடுகோடு என்றால் அதன் தன் மாற்று வரை அதுவே. T யின் தன் மாற்றுப்புள்ளி T' ஆனால், அது S' இல் அமையும்.

$\therefore\ OT'$, S' ஐத் தொடும்)

5. வட்டங்கள் S, S' க்கு O வடிவொப்பு மையம்.

(OTT' பொதுத் தொடுகோடு ஆனதால்.

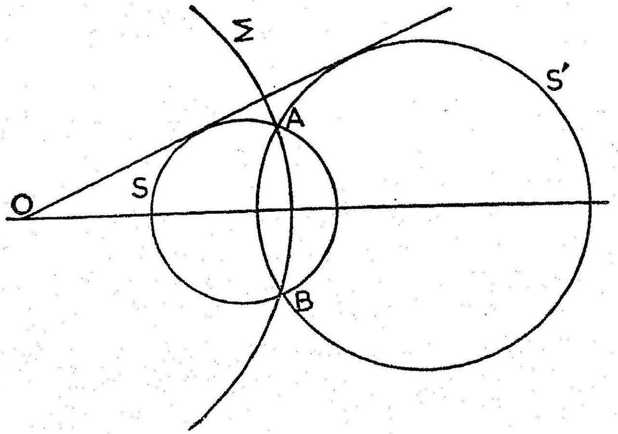
$\therefore\ P, P'$ வேற்றுப் புள்ளிகள் ஆகும்.

$$OP\ .\ OP' = r^2 = OT\ .\ OT'$$

6. ஒரு வட்டம், அதன் தன் மாற்று வட்டம், அவற்றின் தன் மாற்றுவட்டம் இவை ஓரச்சு வட்டங்கள்.

($S, S' \sum$ ஓரச்சு வட்டங்கள்)

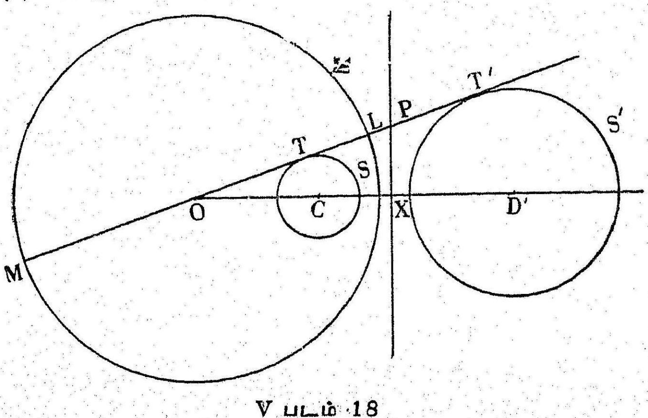
(1) S, $\sum$ வை வெட்டட்டும்.



V படம் 17

$\sum$ தன் மாற்றி ⊙ வட்டம் அதன் மையம் O என்போம்.
S, $\sum$ என்னும் வட்டங்கள் A, B யில் வெட்டட்டும்.
A, B, தன் மாற்றி வட்டங்களிலுள்ள புள்ளிகள்.
∴ அவற்றின் தன் மாற்றுப் புள்ளிகள் A, B தான்.
∴ A, B, S' இலும் அமையும்.
∴ S, S' $\sum$, என்னும் மூன்று வட்டங்களும் A, B யில் வெட்டுகின்றன.
∴ அவை ஓரச்சு வட்டங்கள்.

(2) S, $\sum$ வை வெட்டாவிட்டால்,



V படம் 18

O, C, D' வட்டங்கள் $\sum, S, S'$ இன் மையங்கள் ஆகட்டும்.
O வழியே OTT' பொது தொடுகோடு வரையவும்.
P, TT' இன் நடுப்புள்ளியாகட்டும். P யிலிருந்து OCD'க்கு PX என்னும் குத்துக்கோடு வரைக.

நிரூபிக்க : $PX, S, S' \sum$ இவற்றின் பொது அச்சு ஆகும் என.

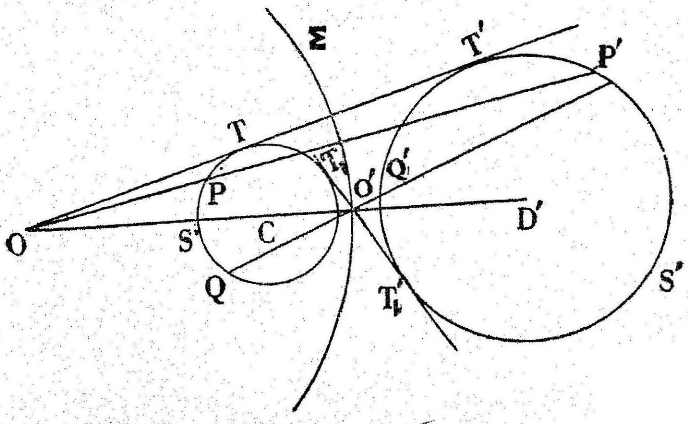
நிரூபணம் : P, TT' இன் நடுப்புள்ளி.

$\therefore$ PX, S, S'இன் சமத்தொடு கோட்டச்சு.

TT', $\sum$ வை LM இல் வெட்டட்டும்.
$\sum$ க்கு T, T' தன் மாற்றுப் புள்ளிகள்
$\therefore \quad OT \cdot OT' = OL^2$
$\therefore \quad (LM, TT') = -1.$
மேலும் P, TT' இன் நடுப்புள்ளி.
$\therefore \quad PL \cdot PM = PT^2 = PT'^2.$
$\therefore \quad \sum, S, S'$ க்கு P யின் வர்க்கங்கள் சமம்.
மேலும் $\sum, S, S'$ இன் மையங்கள் ஒரு நேர் கோடமைவன.
$\therefore \quad \sum, S, S'$ ஓரச்சு வட்டங்கள்.
$\therefore \quad PX$ பொது அச்சு ஆகும்.

7. இரண்டு வட்டங்களை அவற்றின் வடிவொப்பு மையத்துக்குத் தன் மாற்றம் செய்தால் அவை ஒன்றுக்கொன்று தன் மாற்றுகளாகும்.

(If two cricles are inverted with respect to a centre of similitude, they invert to each other)



V படம் 19

வட்டங்கள் S, S' க்கு O, O' வடிவொப்பு மையங்கள். OTT', $O'TT'$ பொதுத்தொடுகோடுகள் ஆகட்டும். O வை மையமாகவும், $\sqrt{OT \cdot OT'}$ ஐ ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டம் $\sum$ வைத் தன் மாற்றி வட்டமாக எடுத்துக் கொண்டால்,

T, T' தன் மாற்றுப் புள்ளிகள்.

O வடிவொப்பு மையம்.

O வழியே OPP' என்ற கோடு வட்டங்களை P, P' என்ற வேற்றுப் புள்ளிகளில் வெட்டும்படி வரைக.

$\therefore \quad OP \cdot OP' = OT \cdot OT' = r^2.$

$\therefore \quad P, P'$ தன் மாற்றுப் புள்ளிகள்.

$\therefore \quad P$ யின் தன் மாற்றுப் புள்ளி வட்டம் S' இல் அமையும்.

$\therefore$ வட்டம் S இன் தன் மாற்று வட்டம் S' ஆகும்.

$\therefore \quad S'$ இன் தன் மாற்று S ஆகும்.

இதுபோலவே, O'ஐத் தன் மாற்றி மையமாகவும், கற்பனை எண் $\sqrt{O'T_1 \cdot O'T_1'}$, ஆரமாகவும் கொண்ட கற்பனை வட்டத்தைக் தன்மாற்று வட்டமாகக் கொண்டால், S, S' தன் மாற்று வட்டங்கள் என நிரூபிக்கலாம்.

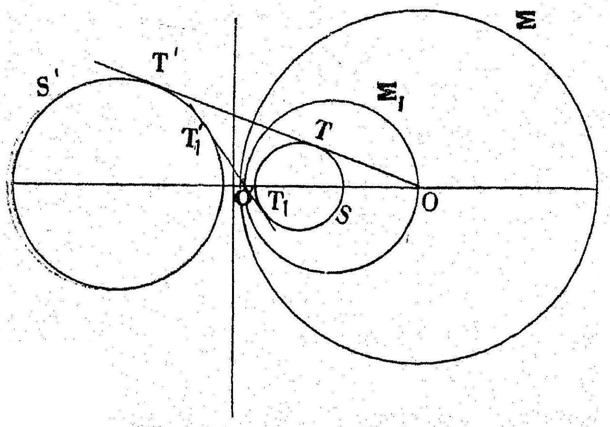
O' வழி $QO'Q'$ வட்டங்களை Q, Q' என்றும் வேற்றுப் புள்ளிகளில் வெட்டும்படி வரைந்தால்,

$O'Q \cdot O'Q' = O'T_1 \cdot O'T_1'$

$\therefore \quad Q, Q'$ தன் மாற்றுப் புள்ளிகள்.

$\therefore \quad S, S'$ தன் மாற்றுகள்.

8. தன் மாற்று வட்டமும், இரண்டு தன் மாற்று வட்டங்களும், தன் மாற்று வட்டங்களின் வடிவொப்பு வட்டமும் ஓரச்சு வட்டங்களாகும்.



V படம் 20

(வட்டங்கள் S, S' என்றும், தன்மாற்று வட்டம் $\sum$ என்றும் வடிவொப்பு வட்டம் $\sum_1$ என்றும் கொள்வோம்.

S, S', $\sum$ ஓரச்சு வட்டங்கள் என கிளைத்தேற்றம் 6 இல் நிருபிக்கப்பட்டது.

S, S' $\sum_1$ ஓரச்சு வட்டங்கள் என தேற்றம் 44இல் நிருபிக்கப் பட்டது.

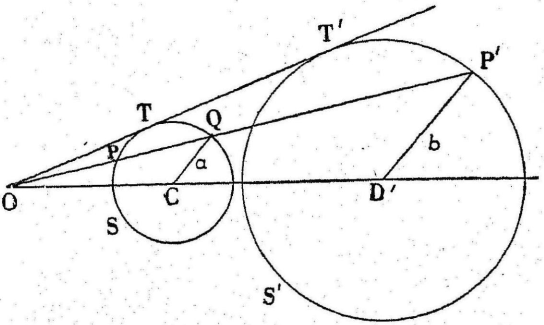
$\therefore$ $S, S', \sum \sum_1$ ஓரச்சு வட்டங்கள்)

முக்கிய குறிப்பு

S, S' க்குத் தன்மாற்றிமையம், O. அவற்றின் வடிவொப்பு மையமாகும்.

ஆனல் அவற்றின் தன் மாற்றி வட்டம் வடிவொப்பு வட்டம் அல்ல என்பதைக் கவனிக்கவும்.

தன்மாற்று வட்டத்தின் மையமும் ஆரமும் கண்டுபிடிக்க



V படம் 21

வட்டங்கள் S, S', O வுக்குத் தன் மாற்றுகள்.

OTT' பொதுத் தொடு கோடு வரைக.

P யின் தன் மாற்றுப் புள்ளி P' ஆகட்டும்.

OPP', வட்டம் Sஐ Q வில் வெட்டட்டும்.

S, S' இன் மையங்கள் C, D' ஆகட்டும்

வட்டங்கள் S,S' இன் ஆரங்கள் $= a, b$

தன் மாற்றி ஆரம் $= r$.

$OT = t, \quad OT' = t'$.

$OC = d \quad OD' = d'$ என்போம்.

P, P' இன் தன் மாற்றுப் புள்ளி

$\therefore \quad OP \cdot OP' = OT \cdot OT' = r^2$.

$\therefore$ P, P' வட்டங்கள் S, S' இல் வடிவொப்புமையம் O வுக்கு வேற்றுப் புள்ளிகள்.

$\therefore$ P', Q ஒத்த புள்ளிகள்.

$$\therefore \quad \frac{OP'}{OQ} = \frac{b}{a}.$$

ஆனால் $OP \cdot OP' = r^2$

$$OP \cdot OQ = t^2.$$

$$\therefore \quad \frac{OP'}{OQ} = \frac{r^2}{t^2}.$$

$$\therefore \quad \frac{b}{a} = \frac{r^2}{t^2}$$

$$\therefore \quad b = \frac{r^2}{t^2} \cdot a.$$

$$\therefore \quad b = \frac{r^2}{d^2-a^2} \cdot a. \qquad \text{——(1)}$$

இதிலிருந்து S' இன் ஆரம் கண்டுபிடிக்க ஒரு சூத்திரம் கிடைக்கிறது.

$$\text{மேலும்} \quad \frac{OD'}{OC} = \frac{b}{a} = \frac{OP'}{OQ}.$$

$$\therefore \quad = \frac{r^2}{t^2}. \qquad \text{(நிரூபித்தபடி)}$$

$$\therefore \quad OD' = \frac{r^2}{t^2} \cdot d$$

$$\therefore \quad d' = \frac{r^2 d}{d^2-a^2}. \qquad \text{——(2)}$$

இதிலிருந்து வட்டத்தின் மையத்தையும் கண்டு பிடிக்கலாம்.

(1) இலிருந்து

$$r^2 = \frac{d^2-a^2}{a} \cdot b$$

$\therefore$ ஒரு கொடுக்கப்பட்ட வட்டம் S ஐ, கொடுக்கப்பட்ட ஆரம் b உள்ள வட்டமாகத் தன் மாற்றம் செய்ய தன் மாற்றி ஆரம் r ஐக் கண்டு பிடிக்கலாம்.

(அ-து) தகுந்த தன் மாற்றி ஆரம் எடுத்து, ஒரு குறிப்பிட்ட வட்டத்தை ஒரு குறிப்பிட்ட ஆரமுள்ள வட்டமாகத் தன்மாற்றம் செய்யலாம்.

இரண்டு வட்டங்களைச் சம வட்டங்களாகத் தன்மாற்றம் செய்ய முடியும்.

1) கொடுக்கப்பட்ட வட்டங்கள் S_1, S_2.

2) வட்டங்களின் ஆரங்கள் a_1, a_2

3) தன் மாற்றி மையம் — O.

4) தன் மாற்றி மையத்திலிருந்து வட்ட மையங்களின் தூரங்கள் d_1, d_2 என்போம்.

வட்டங்களின் தன்மாற்றுகள் S_1', S_2' ஆகட்டும்.

அவற்றின் ஆரங்கள் a_1', a_2' ஆகட்டும்.

தன் மாற்றி மையத்திலிருந்து S_1', S_2' இன் மையங்களின் தூரங்கள் d_1', d_2' ஆகட்டும்.

$$a_1' = \frac{r^2}{d_1^2 - a_1^2} \cdot a_1$$

$$a_2' = \frac{r^2}{d_2^2 - a_2^2} \cdot a_2$$

$a_1' = a_2'$ ஆனால்,

$$\frac{r^2}{d_1^2 - a_1^2} \cdot a_1 = \frac{r^2}{d_2^2 - a_2^2} a_2$$

$$\frac{a_1}{d_1^2 - a_1^2} = \frac{a_2}{d_2^2 - a_2^2}.$$

$$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{d_1^2 - a_1^2}{d_2^2 - a_2^2}.$$

$\therefore$ S_1, S_2 க்கு O வின் வர்க்கங்கள், $\frac{a_1}{a_2}$ என்னும் விகிதத்தில் இருக்கிறது.

$\therefore$ O வின் நியமப்பாதை, S_1, S_2 க்கு ஓரச்சு வட்டம்.

இந்த வட்டத்தில் ஏதாவது ஒரு புள்ளியைத் தன் மாற்றி மையமாகக் கொண்டால் S_1, S_2 இன் தன்மாற்றுகள் சமவட்டங்களாகும்.

குறிப்பு :

S_1, S_2 க்கு O வின் வர்க்கங்கள் $= \frac{a_1}{a_2}$.

$\therefore$ O விலிருந்து S_1, S_2 க்குத் தொடு கோடுகள் OT_1, OT_2 வரைந்தால்

$$\frac{OT_1^2}{OT_2^2} = \frac{a_1}{a_2}.$$

S_1, S_2 O வின் நியமப்பாதையான ஓரச்சு வட்டம் இவற்றின் மையங்கள் முறையே A_1, A_2, A_3 ஆனால்,

$$\frac{OT_1^2}{OT_2^2} = \frac{A_1 A_3}{A_2 A_3}.$$ (தேற்றம்—40)

$$\therefore \quad \frac{A_1 A_3}{A_2 A_3} = \frac{a_1}{a_2}.$$

$\therefore$ A_3 ஒரு வடிவொப்பு மையம்.

$\therefore$ O வின் நியமப்பாதை வடிவொப்பு மையத்தை மையமாகக் கொண்ட ஓரச்சு வட்டம்.

ஆனால் இந்த வட்டத்துக்கு S_1, S_2 தன் மாற்றுகள் ஆகும். (கிளைத்தேற்றம் –7)

$\therefore$ S_1, S_2 கொடுத்திருந்தால், அவை ஒன்றுக்கொன்று தன் மாற்றுகள் ஆகும் தன் மாற்றி வட்டத்தில் எந்தப் புள்ளிக்கும் தன்மாற்றம் செய்தால் S_1, S_2 சம வட்டங்களாகத் தன் மாற்றம் செய்யப்படும்.

V-படம் ?0 இல், S, S_1 ஐ, $\sum$ வில் ஏதாவது ஒரு புள்ளிக்குத் தன்மாற்றம் செய்ய சம வட்டங்கள் கிடைக்கும் என்பதறிக.

2. மூன்று வட்டங்களையும் சம வட்டங்களாகத் தன் மாற்றம் செய்யலாம்.

இரண்டு வட்டங்களைச் சம வட்டங்களாகத் தன் மாற்றம் செய்ய O வின் நியமப்பாதை ஒரு வட்டம்.

வட்டங்கள் C_1, C_2, C_3 என்றால், C_1, C_2 ஐச் சமமாகத் தன் மாற்றம் செய்யும் புள்ளியின் நியமப்பாதையும்,

C_2, C_3 ஐச் சமமாகத் தன்மாற்றம் செய்யும் புள்ளியின் நியமப்பாதையும் வெட்டுப் புள்ளிகள் இரண்டில் ஒன்றைத் தன் மாற்றி மையமாகக் கொண்டால்,

C_1, C_2, C_3 இவற்றின் தன்மாற்றுகள் சமம்.

3. இரண்டு வட்டங்களைக் கொடுக்கப்பட்ட ஆரமுள்ள சம வட்டங்களாகத் தன்மாற்றம் செய்யலாம்.

C_1, C_2 கொடுக்கப்பட்ட வட்டங்களாகட்டும்.

ஆரங்கள் a_1, a_2.

O வின் நியமப்பாதையில் ஏதாவது ஒரு புள்ளியைத் தன் மாற்றிப்புள்ளியாகக் கொண்டால், கிடைக்கவேண்டிய வட்டங்களின் ஆரம் b என்றால்,

$$r^2 = \frac{d_1^2 - d_2^2}{a_1} \cdot b$$

என்பதை உபயோகித்துத் தகுந்த தன்மாற்றி ஆரம் எடுத்தால், C_1^3 இன் ஆரம் b ஆகும்.

C_1', C_2' சம ஆரமுள்ளவை.

$\therefore$ C_2' இன் ஆரமும் b ஆகும்.

4. இரண்டு வட்டங்களைக் கொடுக்கப்பட்ட ஆரங்களுள்ள வட்டங்களாகத் தன்மாற்றம் செய்யலாம்.

C_1, C_2 கொடுக்கப்பட்ட வட்டங்களாகட்டும்.

அவற்றின் ஆரங்கள் a_1, a_2 என்போம்.

C_1' இன் ஆரம் a_1' என்றும், C_2' இன் ஆரம் a_2' என்றும் உள்ளபடி இவற்றைத் தன் மாற்றம் செய்ய.

$$a_1' = \frac{r^2}{d_1^2 - a_1^2} \cdot a_1$$

$$a_2' = \frac{r^2}{d_2^2 - a_2^2} \cdot a_2$$

$$\therefore \quad t_2 = \frac{a_1'}{a_2'} = \frac{r^2 \cdot a_1}{d_1^2 - a_1^2} \cdot \frac{d_2^2 - a_2^2}{r^2 \cdot a_2}$$

$$= \frac{d_2^2 - a_2^2}{d_1^2 - a_1^2} \cdot \frac{a_1}{a_2}.$$

$$\therefore \quad \frac{d_2^2 - a_2^2}{d_1^2 - a_1^2} = \frac{a_1'}{a_2'} \cdot \frac{a_2}{a_1} = \text{ஒரு மாறிலி.}$$

(a_1', a'_1 கொடுத்திருப்பதால்)

$\therefore$ O வின் நியமம்பாதை ஒரு ஓரச்சு வட்டம்.

இந்த ஓரச்சு வட்டத்தில் ஏதாவது ஒரு புள்ளிக்கு C_1, C_2 ஐத் தன் மாற்றம் செய்தால், C_1', C_2' இன் ஆரங்கள் a_1', : a'_2 என்ற விகிதத்தில் இருக்கும்.

அதில் ஏதாவது ஒரு புள்ளியை எடுத்து, முன் காட்டிய படி,

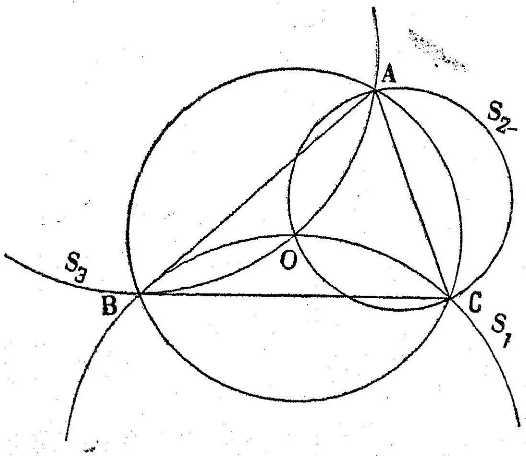
$$r^2 = \frac{d_1^2 - a_1^2}{a_1} \cdot a_1'$$

தகுந்த r எடுத்து, C_1' இன் ஆரம் a_1' இருக்கும்படி தன் மாற்றம் செய்யலாம்.

$\therefore$ அதே தன் மாற்று வட்டத்துக்கு C_2' இன் ஆரம் a_2' ஆகும்.

மாதிரிகள் :

1. ஒருமுக்கோணத்தின் சுற்றுவட்ட மையத்துக்கு அதன் பக்கங்களின் தன்மாற்றுகள் என்ன ?



V படம் 22

கொள்கை :

$\triangle$ *ABC* யின் சுற்றுவட்ட மையம் *O* ஆகட்டும்.

கண்டுபிடிக்க :

BC, *CA*, *AB* யின் தன் மாற்றுகள்.

(1) *BC* யின் தன் மாற்று *O* வழிச் செல்லும் ஒரு வட்டம்.

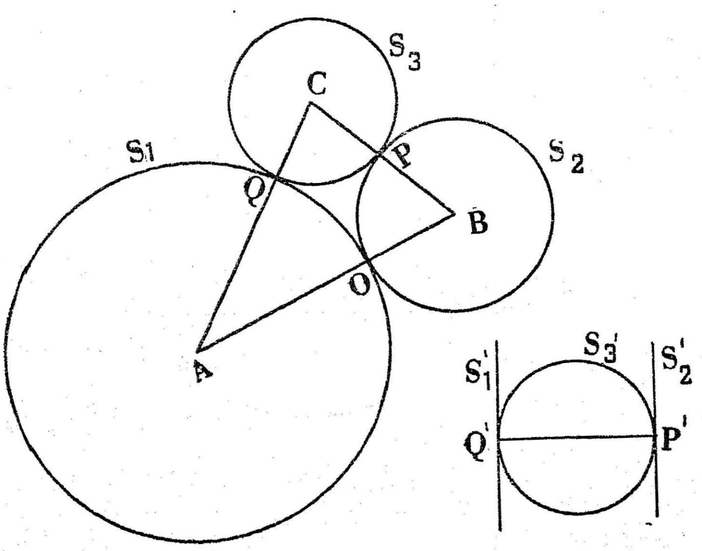
B, *C* சுற்று வட்டத்தில் இருப்பதால் அவை *BC* யின் தன் மாற்று வரையிலும் இருக்கும்.

∴ *BC* யின் தன் மாற்று வரை வட்டம் *OBC* யாகும்.

(2) அதுபோலவே *CA*, *AB*யின் தன்மாற்று வரைகள் வட்டங்கள் *OCA*, *OAB* ஆகும்.

2. 3 வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று 3 புள்ளிகளில் தொடுகின்றன. அவற்றை ஒரு தொடு புள்ளிக்குத் தன்மாற்றம் செய்க.

(Invert 3 circles which touch each other at 3 points w. r. t. one of the points of contact)



படம் தன்மாற்றுப் படம்

V படம் 23

கொள்கை :

S_1, S_2, S_3, O, P, Q இல் தொடுகின்றன.

A, B, C அவற்றின் மையங்கள்.

கண்டுபிடிக்க :

S_1, S_2, S_3 ஐ O வுக்குத் தன்மாற்றம் செய்தால் கிடைக்கும் தன்மாற்றுகள் கண்டுபிடிக்க.

(1) S_1, D வழிச்செல்வதால் அதன் தன்மாற்று S_1' ஒரு நேர்கோடு.

அது OA க்குக் குத்தாக இருக்கும்.

மேலும் Q' வழிச் செல்லும்.

(2) S_2 O வழிச் செல்வதால் அதன் தன்மாற்று S_2' ஒரு நேர்கோடு.

அதுவும் OB க்குக் குத்துக் கோடு.

அது P' வழிச் செல்லும்.

$\therefore$ S_1', S_2' இணைகோடுகள்.

(3) S_3, O வழிச் செல்லவில்லை.

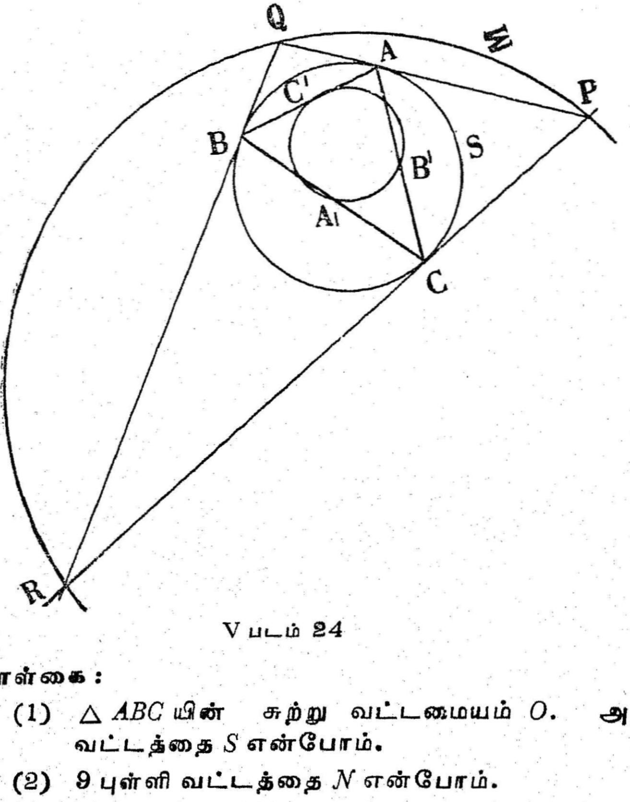
$\therefore$ S_3' ஒரு வட்டம்.

அது P', Q' வழிச் செல்லும்.

S_1, S_2 ஐ S_3 தொடுவதால் S_3' உம் S_1', S_2' யை Q', P' இல் தொடும்.

∴ S_1', S_2', S_3', ஒரு ஜதை இணை கோடுகளும், அவற்றைத் தொடும் வட்டமும் ஆகும்.

3. ஒரு முக்கோணத்தின் சுற்று வட்டம், 9 புள்ளி வட்டம், சுற்று வட்டத்துக்கு A, B, C யில் வரையப்பட்ட தொடு கோடுகளால் அடைபட்ட முக்கோணத்தின் சுற்று வட்டம், இவை ஓரச்சு வட்டங்கள் என நிரூபிக்கவும்.



V படம் 24

கொள்கை :

(1) △ ABC யின் சுற்று வட்டமையம் O. அந்த வட்டத்தை S என்போம்.

(2) 9 புள்ளி வட்டத்தை N என்போம்.

(3) PQ, QR, RP சுற்று வட்டத்துக்கு A, B, C யில் தொடு கோடுகள்.

(4) வட்டம் PQR ஐ $\sum$ என்போம்.

(5) A', B', C' BC, CA, AB யின் நடுப் புள்ளிகள் ஆகட்டும்.

நிரூபிக்க :

வட்டங்கள் S, N, $\sum$ ஓரச்சு வட்டங்கள் என.

நிருபணம் :

சுற்று வட்ட மையம் O வுக்குத் தன் மாற்றம் செய்வோம்.

(1) B, C யில் தொடு கோடுகள் R இல் சந்திப்பதால், R இன் தன்மாற்றுப் புள்ளி A' ஆகும்.

அதுபோலவே P, Q இன் தன்மாற்றுப் புள்ளிகள் B', C' ஆகும்.

∴ $\triangle PQR$ இன் தன் மாற்றுவரை A', B', C' வழிச் செல்லும் ஒரு வட்டம் ஆகும்.

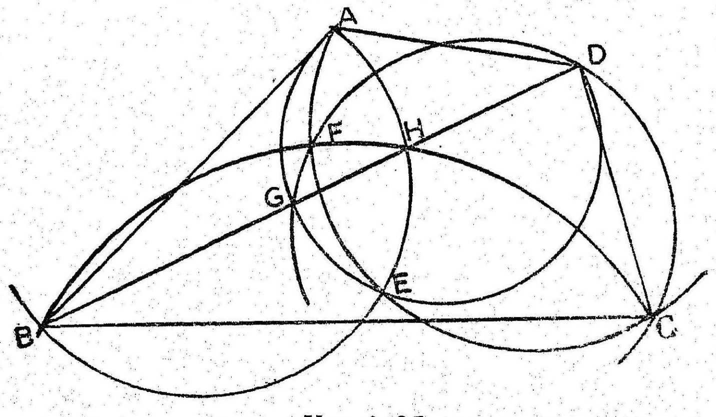
(அ–து) $\sum$ வின் தன் மாற்று வரை 9 புள்ளி வட்டம் N ஆகும்.

ஒரு வட்டம், அதன் தன் மாற்று வட்டம், தன் மாற்றி வட்டம் இவை ஓரச்சு வட்டங்கள்.

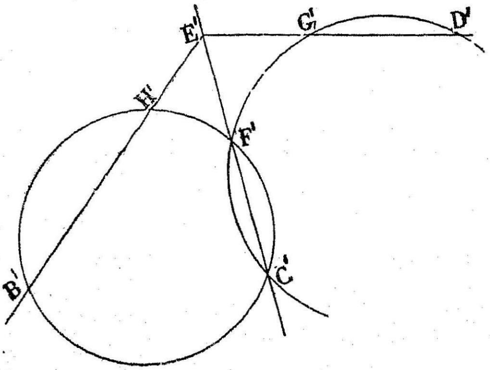
(தேற்றம்—47 கிளை—6)

∴ S, N, $\sum$ ஓரச்சு வட்டங்கள்.

4. $ABCD$ ஒரு நாற்கரம். E என்னும் புள்ளி வழியே, AEB, AEC, AED என்னும் வட்டங்கள் வரையப்படுகின்றன. B, C வழிச் செல்லும் வட்டம் ஒன்று, $\odot AEB$ யை H இலும், $\odot AEC$ ஐ F லும் வெட்டுகிறது. $\odot CDF$, $\odot AED$ ஐ G யில் வெட்டுகிறது. B, G, H, D ஒரு ஒரு வட்டப் பரிதியிலுள்ள புள்ளிகள் அல்லது நேர்கோடு என நிரூபிக்கவும்.



V படம் 25



V படம் 26

கொள்கை:

(1) $ABCD$ நாற்கரத்தில் E வழியே வட்டங்கள் AEB, AEC, AED செல்கின்றன.

(2) B, C வழிச் செல்லும் வட்டம் ஒன்று $\odot AEB$, $\odot AEC$ ஐ H, F இல் வெட்டுகிறது.

(3) $\odot FCD$, $\odot AED$ ஐ G யில் வெட்டுகிறது.

நிரூபிக்க: B, G, H, D ஒரு நேர் கோட்டில் அமையும். அல்லது ஒரு வட்டப் பரிதியில் அமையும் என.

நிரூபணம்: A க்குத் தன்மாற்றம் செய்க. $\odot AEB$, $\odot AEC$, $\odot AED$, யின் தன் மாற்றுகள் நேர்கோடுகள். அவை E' வழிச் செல்லும். அவை $E'B'$, $E'C'$, $E'D'$ ஆகும்.

$\odot BCHF$, A வழிச் செல்லாததால் அதன் தன்மாற்று ஒரு வட்டம் ஆகும்.

அது $E'B'$, $E'C'$, ஐ $H'F'$ இல் வெட்டும்.

$\odot CDFF$, A வழிச் செல்லாததால் அதன் தன்மாற்று ஒரு வட்டம் ஆகும்.

அது $E'D'$ ஐ G' இல் வெட்டும்.

$\therefore$ படம் 25 இன் தன்மாற்று படம் 26 ஆகும். தன் மாற்றுப் படத்தில்,

வட்டங்கள் $B'H'F'C'$, $F'_2C_1'D'G'$ க்கு $F'C'$ பொது நாண்.

$$\therefore E'B' \cdot E'H' = E'C' \cdot E'F'$$

$$= ED' \cdot E'G'.$$

∴ $B'H'G'D'$ வட்ட நாற்கரம்.

∴ $BHGD$, A வழி நேர்கோடாக இருக்கலாம், அல்லது ஒரு வட்டமாக இருக்கலாம். நி·வே.

பயிற்சி 21 (a)

1. இரண்டு வெட்டாத வட்டங்களை அவற்றின் மேல் அல்லாத ஒரு புள்ளிக்குத் தன்மாற்றம் செய்தால் அவற்றின் பொதுத் தொடுகோட்டின் தன்மாற்று என்ன ?

2. மூன்று வட்டங்கள் இரண்டு புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன. வெட்டுப்புள்ளிகளில் ஒன்றுக்கு அவற்றைத் தன் மாற்றம் செய்தால் அவற்றின் தன் மாற்றுகள என்ன?

படம் வரைந்து வட்டமையங்களின் தன்மாற்றுகளைக் குறிக்கவும்.

3. தன் மாற்றி வட்டத்திற்கு p என்றும் நேர் கோட்டின் போல் P ஆகும். O தன்மாற்றி மையம். O வுக்கு p யின் தன் மாற்று என்ன?

4. ஒரு வட்டத்துக்கு அதன் தொடு கோட்டின் தன் மாற்று என்ன?

5. ஒரு வட்டத்தை (S) ஒரு நேர்கோடு p வெட்டுகிறது. இவற்றைக் கீழ்க் கண்ட தன்மாற்றி மையங்களைக் கொண்டு தன் மாற்றம் செய்க.

(1) அவை வெட்டும் புள்ளிகளில் ஒன்று.

(2) வட்டத்தின் மேல் ஒரு புள்ளி.

(3) நேர்கோட்டின் மேல் ஒரு புள்ளி.

(4) இவை இரண்டிலும் இல்லாத ஒரு புள்ளி.

6. 3 வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்கின்றன. ஒரு வெட்டும் புள்ளிக்குத் தன்மாற்றம் செய்க. மற்ற வெட்டுப் புள்ளிகளின் தன்மாற்றுகள் என்ன ?

7. ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களை ஒரு உச்சிப் புள்ளிக்குத் தன்மாற்றம் செய்தால் கிடைக்கும் படம் என்ன ?

8. தன்மாற்றி வட்டம் ஒரு முக்கோணத்தின் உள் வட்டம் ஆனால் அதன் பக்கங்களின் தன் மாற்றுகள் என்ன?

9. இரண்டு வட்டங்கள் வெளிப்புறமாக O வில் தொடுகின்றன. TT' அவற்றின் பொதுத் தொடுகோடு. O வுக்குத் தன்மாற்றம் செய்க.

10. ஒரு முக்கோணத்தையும் அதன் பக்கங்களைத் தொடும் 4 வட்டங்களையும் ஏதாவது ஒரு புள்ளிக்குத் தன் மாற்றம் செய்க.

இதிலிருந்து மூன்று வட்டங்களைத் தொடும் வட்டங்கள் எத்தனை உண்டு என்று தெரிகிறது?

11. ABC ஒரு நேர் கோடு. O அதில் இல்லாத வேறொரு புள்ளி. வட்டங்கள் AOB, BOC, COA, & ABC, இவற்றை Oக்குத் தன்மாற்றம் செய்க. ABC யின் தன்மாற்று என்ன?

12. ஒரு வட்டமும், அதன் மேல் O என்னும் ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லும் விட்டத்துக்குச் செங்குத்துக் கோடும் ஒன்றுக்கொன்று தன் மாற்றுகள். தன்மாற்றி வட்டத்தின் மையத்தையும் ஆரத்தையும் கண்டுபிடிக்கவும்.

பயிற்சி 21 (b)

1. மூன்று வட்டங்கள் A, B; C, D; E, F இல் வெட்டுகின்றன. வட்டங்கள் OAB, OCD, OEF மற்றொரு புள்ளி வழிச் செல்கின்றன என நிரூபிக்கவும்.

2. மூன்று வட்டங்கள் ஓரச்சு வட்டங்கள் இல்லையென்றால் அவற்றை இரண்டிரண்டாக எடுக்க அவற்றின் சமத் தொடு கோட்டச்சுகளின் தன்மாற்றுகள் ஓரச்சு வட்டங்களெனக் காட்டவும்.

3. இரண்டு வெட்டும் வட்டங்களுக்கு PQ, RS பொதுத் தொடுகோடுகள். வட்டங்களின் ஒரு வெட்டும் புள்ளி A என்றால் ⊙ PAQ, ⊙ RAS தொடு வட்டங்கள் என நிரூபிக்கவும்.

4. இரண்டு வட்டங்கள் A, B யில் வெட்டுகின்றன. இரண்டு வட்டங்கள் இந்த வட்டங்களை P, Q; R, S இல் தொடுகின்றன. ⊙ PAQ. ⊙ RAS, A யில் தொடுகின்றன என நிரூபிக்கவும்.

5. ஒரு முக்கோணத்தின் சுற்று வட்டம், ஒன்பது புள்ளி வட்டம், அதன் போலார் வட்டம் இவை ஓரச்சு வட்டங்கள் என நிரூபிக்கவும்.

6. ABC ஒரு நேர்கோடு. O அதற்கு வெளியே ஒரு புள்ளி. $\odot AOB$, $\odot BOC$, $\odot COA$ ஐ O வுக்குத் தன்மாற்றம் செய்க. வட்டங்களின் மையங்கள் O வழிச் செல்லும் ஒரு வட்டத்தில் அமைவன என்று நிருபிக்கவும்.

O வழிச் செல்லும் விட்டங்களின் எதிர் முனைகளும் O வழிச் செல்லும் ஒரு வட்டத்தில் அமைவன என நிருபிக்கவும்.

7. $\triangle ABC$ யில் வட்டம் BOC யின் மையம் AO விலும், வட்டம் COA யின் மையம் BO விலும், வட்டம் AOB யின் மையம் CO விலும் இருக்கும்படி O என்னும் புள்ளி அமைந்திருக்கிறது. வட்டங்களின் மையங்கள் $\triangle ABC$ யின் சுற்று வட்டத்தில் அமைகின்றன என நிருபிக்கவும்.

8. ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு பக்கங்கள் AB, AC யையும் சுற்று வட்டம் ABC யையும் தொடும் வட்டங்கள் 4 உண்டு என்றும் AB, AC உடன் இவற்றின் தொடு நாண்கள் முக்கோணத்தின் பக்கங்களைத் தொடும் வட்டங்களின் மையங்களின் வழியே செல்லும் எனவும் நிருபிக்கவும்.

(உதவிக் குறிப்பு-தொடு வட்டத்தை, A யைத் தன்மாற்றி மையமாகக் கொண்டு அப்படியே தன் மாற்றம் செய்க).

9. ஒரு வட்டத்தில் ஒரு P நிலைத்த புள்ளி. APB, CDP இரு நாண்கள். வட்டங்கள் APC, BPD மறுபடியும் Q வில் வெட்டுகின்றன. Q வின் நியமப் பாதை என்ன ?

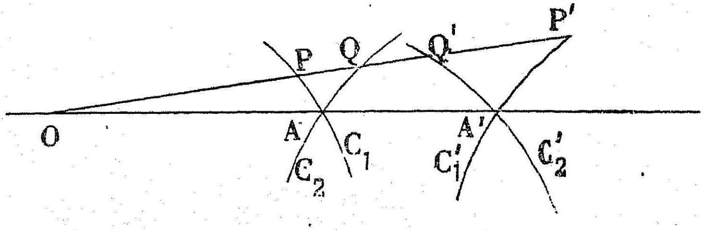
10. முக்கோணம் ABC யின் சுற்று வட்டத்திற்கு PB, PC தொடுகோடுகள். AB, AC; B, C யின் வழிச் செல்லும் மற்றொரு வட்டத்தை M, N ல் வெட்டுகின்றன. AP, MN ஐ இருசமக் கூறிடுகிறது என நிருபிக்கவும்.

(உதவிக் குறிப்பு- A யைத் தன்மாற்றி மையமாகக் கொண்டு $\sqrt{AB \cdot AM}$ ஐத் தன்மாற்றி ஆரமாகக் கொள்ளவும்).

11. ஒரு வட்டம் S மற்றொரு வட்டம் S_1 இன் மையத்தின் வழியே செல்கிறது. இரண்டு வட்டங்களுக்கும் நேர்ப் பொதுத் தொடுகோடுகள் O வில் சந்திக்கின்றன. அவை S ஐ P, Q வில் தொடுகின்றன். PQ வட்டம் S_1 ஐத் தொடுகிறது என நிருபிக்கவும்.

தேற்றம் 48

இரண்டு வளைகோடுகளுக்கு இடையேயுள்ள கோணம் அவற்றின் தன்மாற்றுகளுக்கு இடையே உள்ள கோணத்துக்குச் சமம்.



V படம் 27

கொள்கை:

(1) C_1, C_2 இரு வளைகோடுகள் A யில் வெட்டுகின்றன.

(2) C_1', C_2' அவற்றின் தன்மாற்றுகள்.

(3) C_1', C_2' வெட்டும்புள்ளி A'.

நிருபிக்க:

C_1, C_2 க்கு இடையேயுள்ள கோணம் $=$ C_1', C_2' க்கு இடையேயுள்ள கோணம் என.

நிருபணம்: A, A' தன்மாற்றுப் புள்ளிகள்

$\therefore$ $O\,AA'$ ஒரு நேர்கோடு.

அதனருகே OPP' என்னும் நேர்கோடு வரைக.

அது C_1, C_2, C_1', C_2' இவற்றை முறையே P, Q, P', Q' இல் வெட்டட்டும். AP, AQ, $A'P'$, A', Q' இவற்றைச் சேர்க்கவும்.

P, P'; Q, Q' தன்மாற்றுப் புள்ளிகள் ஆகும்.

$\therefore$ $OP \cdot OP' = OQ \cdot OQ' = OA \cdot OA'$.

$\therefore$ $PAA'P'$, $QAA'P'$ நாற்கரங்கள்.

$\therefore$ $\angle OPA =$ உள் எதிர் கோணம் $OA'P'$.

$\angle OQA =$ உள் எதிர்கோணம் $OA'Q'$.

$\therefore$ $\angle OPA - \angle OQA = \angle OA'P' - \angle OA'Q'$.

$\therefore$ $\angle PAQ = \angle P'A'Q'$.

புள்ளிகள் P, Q; A ஐ நெருங்கும் போது, AP, AQ A யில் தொடுகோடுகள் ஆகும்.

அப்பொழுது P', Q' உம் A' ஐ நெருங்கி $A'P'$, $A'Q'$ A' இல் தொடுகோடுகள் ஆகும்.

$\therefore$ C', C_2' க்கு இடையே உள்ள கோணம் $= C_1'$, C_2' க்கு இடையே உள்ள கோணம்.

கிளைத் தேற்றங்கள்

1. (a) இரண்டு தொடு வட்டங்களின் தன்மாற்றுகள் இரண்டு தொடு வட்டங்களாகும்.

(d) இரண்டு தொடு வட்டங்களை அவற்றின் தொடு புள்ளிக்குத் தன்மாற்றம் செய்தால் அவை இரண்டு இணை கோடுகளாகும்.

(c) இரண்டு தொடு வட்டங்களை அவற்றில் ஒரு வட்டத்தின் ஒரு புள்ளிக்குத் தன்மாற்றம் செய்தால் அவை ஒரு வட்டமும் அதன் தொடுகோடும் ஆகும்.

2. இரண்டு இணைக் கோடுகளை இரண்டு தொடு வட்டங்களாகத் தன்மாற்றம் செய்யலாம்.

3. (a) இரண்டு குத்து வட்டங்களின் தன்மாற்றுகள் இரண்டு குத்து வட்டங்களாகும்.

(b) இரண்டு குத்து வட்டங்களை அவற்றின் வெட்டுப் புள்ளிக்குத் தன் மாற்றம் செய்தால் அவை இரண்டு குத்துக் கோடுகளாகும்.

(c) இரண்டு குத்து வட்டங்களை அவற்றில் ஒன்றின் மேல் உள்ள ஒரு புள்ளிக்குத் தன்மாற்றம் செய்தால் அவை ஒரு வட்டமும் அதன் விட்டமுமாகும்.

(ஒரு நேர் கோட்டுக்கும் வட்டத்துக்கும் இடையே உள்ள கோணம் வெட்டுப் புள்ளியில் தொடு கோட்டுக்கும் அந்தக் கோட்டுக்கும் இடையே உள்ள கோணமாகும்.)

4. ஒரு வட்டத்தையும் அதன் தொடு கோட்டையும் இரண்டு தொடு வட்டங்களாகத் தன்மாற்றம் செய்யலாம்.

5. இரண்டு குத்துக் கோடுகளை இரண்டு குத்து வட்டங்களாகத் தன்மாற்றம் செய்யலாம்.

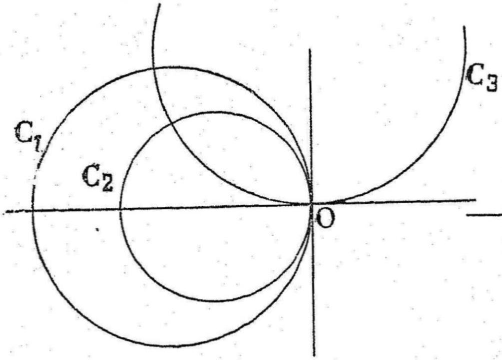
6. ஒரு வட்டத்துக்கும் தன்மாற்றி வட்டத்துக்கும் இடையே உள்ள கோணம், அதன் தன்மாற்று வட்டத்துக்கும், தன்மாற்றி வட்டத்துக்கும் இடையே உள்ள கோணத்துக்குச் சமம்.

(தன்மாற்றி வட்டத்தின் தன்மாற்று அதுவே).

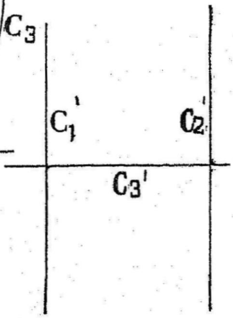
7. ஒரு வட்டத்தையும் அதன் விட்டத்தையும் இரண்டு குத்து வட்டங்களாகத் தன்மாற்றம் செய்யலாம்.

மாதிரிகள்

1. இரு தொடு வட்டங்களையும், தொடு புள்ளியில் அவற்றை குத்தாக வெட்டும் வட்டத்தையும் தொடுபுள்ளிக்குத் தன்மாற்றம் செய்க.



V படம் 28



V படம் 29

கொள்கை: C_1, C_2, C_3 கொடுக்கப்பட்ட வட்டங்களாகட்டும். C_1, C_2 ஐ O வில் தொடுகின்றது. C_3; C_1, C_2 இரண்டையும் குத்தாக வெட்டுகிறது.

கேட்டிருப்பது

அவற்றை O வுக்குத் தன்மாற்றம் செய்ய. C_1, C_2; O வில் தொடுவதால், C_1', C_2' இரு இணைகோடுகளாகும்.

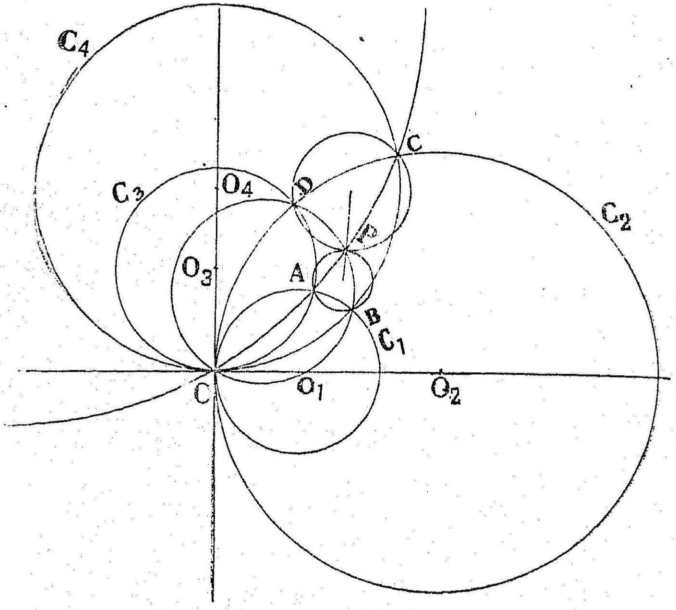
C_3; C_1, C_2 ஐக் குத்தாக வெட்டுவதால், C_3'; C_1', C_2' இரண்டையும் குத்தாக வெட்டுகிறது.

மேலும் C_3, O வழிச் செல்வதால் C_3' ஒரு நேர்கோடு.

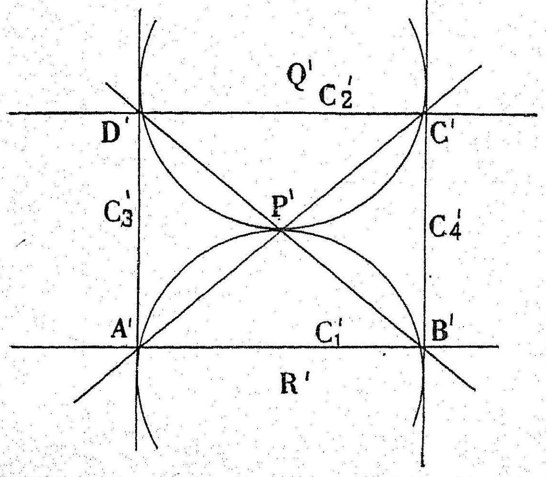
$\therefore$ C_3', C_1', C_2' ஐ க்குத் குத்தாக வெட்டும் ஒரு நேர் கோடாகும். (படம் 29 பார்க்கவும்.

2. இரு வட்டங்கள் A யில் தொடுகின்றன. இவற்றை இன்னும் இரண்டு வட்டங்கள் A யில் குத்தாக வெட்டுகின்றன. இவை ஒன்றையொன்று A, B, C, D யில் வெட்டுகின்றன.

வட்டங்கள் AOC, BOD, P யில் வெட்டுகின்றன. வட்டங்கள் APB, CPD ஒன்றையொன்று P யில் தொடுகின்றன என்று என்று நிரூபிக்கவும்.



V படம் 30



V படம் 31

கொள்கை : (1) C_1, C_2, O வில் தொடுகின்றன.
அவற்றின் மையங்கள் O_1, O_2.

(2) C_3, C_4 இவற்றை O வில் குத்தாக வெட்டுகின்றன.

(3) C_1, C_2, C_3, C_4; A, B, C, D யில் வெட்டுகின்றன.

(4) வட்டம் BOD, வட்டம் AOC யை P யில் வெட்டுகிறது.

நிருபிக்க :

வட்டம் APB, வட்டம் PD யைத் தொடுகிறது என.

நிருபணம் : 1. வட்டங்கள் C_1, C_2; O வில் தொடுவதால் $OO_1\,O_2$ ஒரு நேர்கோடு.

(2) C_3, C_4 இவற்றைக் குத்தாக வெட்டுவதால் அவற்றின் மையங்கள் $O_3\,O_4$; C_1, C_2 க்கு O வில் பொதுத் தொடு கோட்டில் அமையும்.

∴ $OO_3\,O_4$ ஒரு நேர்கோடு.

∴ C_3, C_4; O வில் தொடுகின்றன.

(3) O வுக்கு தன்மாற்றம் செய்க. C_1, C_2 தொடுவட்டங்கள்.

∴ C_1, C_2 இரண்டு இணைகோடுகளாகும். C_3,C_4 Oவில் தொடுகின்றன.

∴ C_3', C_4' இரண்டு இணை கோடுகளாகும்.

மேலும் C_1, C_2 வை C_3, C_4 குத்தாக வெட்டுவதால் C_1', C_2' க்கு C_3', C_4' குத்துக் கோடுகள். C_1', C_2', C_3', C_4'; A', B', C', D இல் வெட்டுகின்றன.

∴ $A'B'C'D'$ ஒரு செவ்வகம்.

(4) வட்டம் BOD யின் தன்மாற்று $B'\,D'$. வட்டம் COA யின் தன்மாற்று $A'C'$.

∴ $B'D'$, $C'A'$ ஐ P' இல் வெட்டுகிறது.

∴ P' செவ்வகம் $A'B'C'D'$ இன் மையப் புள்ளி.

(5) ∴ செவ்வகம் $A'B'C'D'$ இல் வட்டம் $A'P'B'$, வட்டம் $C'P'D'$ இன் மையங்கள் Q', R' முறையே $C'D'$, $A'B'$ இன் நடுக் குத்துக் கோடுகளில் அமையும்.

∴ P', Q', R' ஒரு நேர்கோட்டில் அமையும்.

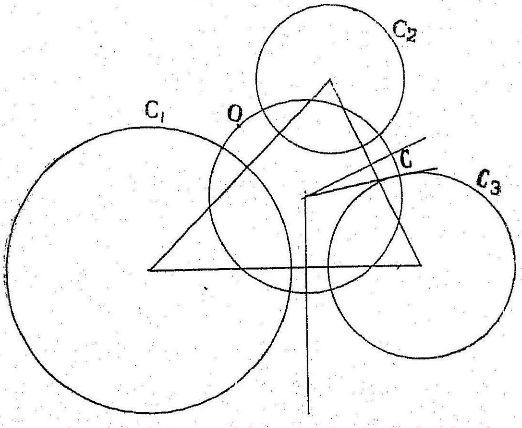
∴ வட்டம் $A'P'B'$, வட்டம் $C'P'D'$ ஐத் தொடுகிறது. (படம் 31)

∴ வட்டம் APB, வட்டம் CPD யைத் தொடுகிறது.

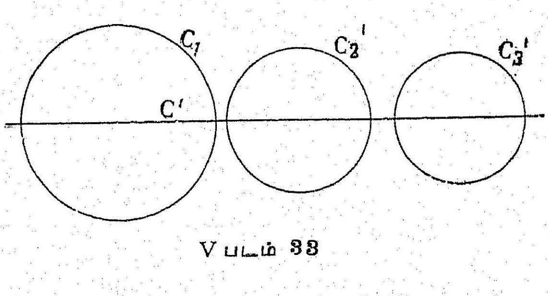
நி. வே.

குறிப்பு. தன்மாற்றம் செய்தலில், சிக்கலான படம் 30 இலிருந்து சுலபமான 31 ஐ அடைகிறோம். இதிலிருந்து நிருபணம் எளிதாகிறதென்பதைக் கவனிக்கவும்.

3. மூன்று வட்டங்களை மையங்கள் ஒரு நேர் கோட்டிலுள்ள மூன்று வட்டங்களாகத் தன்மாற்றம் செய்வதெப்படி?



V படம் 32



V படம் 33

கொள்கை: C_1, C_2, C_3 மூன்று வட்டங்கள்.

கேட்டிருப்பது: அவற்றை ஒரு நேர் கோட்டில் மையங்களுள்ள வட்டங்களாகத் தன்மாற்றம் செய்ய.

முறை C_1, C_2, C_3 இவற்றை குத்தாக வெட்டும் வட்டம் C ஆகட்டும். C யின் மேல் ஏதாவது ஒரு புள்ளி Oவைத் தன் மாற்றி மையமாகக் கொள்க.

மூன்று வட்டங்களின் தன்மாற்றுகளின் மையங்கள் ஒரு நேர் கோட்டில் அமைவன.

நிருபணம் O, வட்டம் C யின் மேல் உள்ளது.

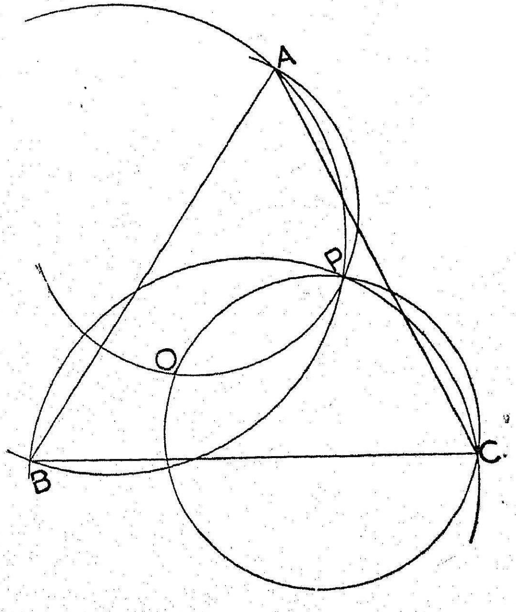
$\therefore$ C' ஒரு நேர்கோடு. C_1, C_2, G_3 ஐ C குத்தாக வெட்டு கிறது.

$\therefore$ C_1', C_2', C_3' ஐ C' குத்தாக வெட்டுகிறது.

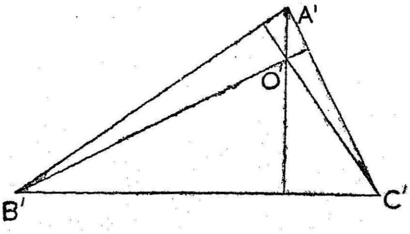
$\therefore$ அவற்றின் மையங்கள் வழியே C' செல்லும். (தேற்றம் 48-கிளை 3 (C)

$\therefore$ C_1', C_2', C_3' இன் மையங்கள் C' இன் தன்மாற்றமான ஒரு நேர் கோட்டில் அமையும். நி. வே.

4. $\triangle ABC$ யின் தளத்தில் P, O இரு புள்ளிகள். வட்டங்கள் PAB, PCO; வட்டங்கள் PBC PAO ஒன்றையொன்று குத்தாக வெட்டுகின்றன. வட்டங்கள் PCA, PBO வும் குத்து வட்டங்கள் என நிருபிக்கவும்.



V படம் 34



V படம் 35

கொள்கை: (1) $\triangle ABC$ யில் O, P இரு புள்ளிகள்.
(2) வட்டம் $BPC \perp$ வட்டம் APO.
(3) வட்டம் $PAB \perp$ வட்டம் PCO.

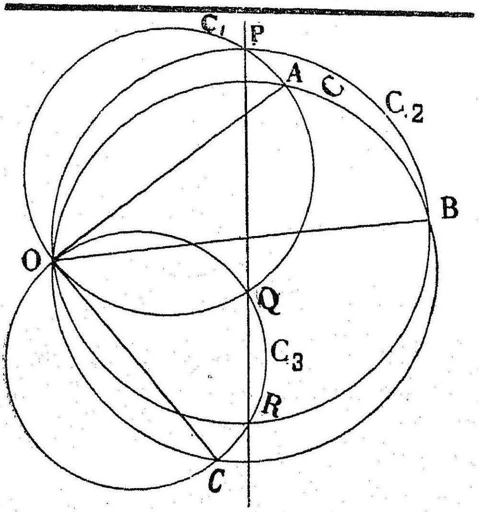
நிரூபிக்க: வட்டம் $PCA \perp$ வட்டம் PBO என.

நிருபணம் P க்குத் தன்மாற்றம் செய்க.

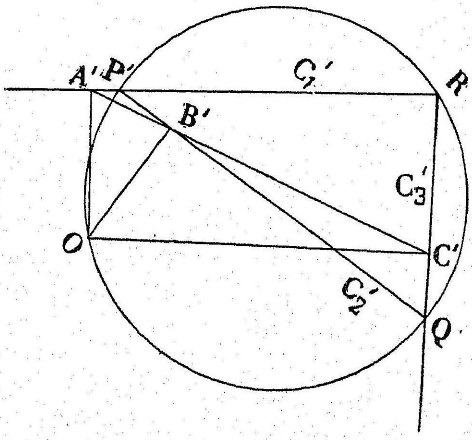
(1) வட்டம் BPC, $B'C'$ என்னும் நேர்கோடாகும்.
வட்டம் APO, $A'O'$ என்னும் நேர்கோடாகும்.
வட்டம் $BPC \perp$ வட்டம் APO (கொள்கை)
$\therefore B'C' \perp A'O'$.

(2) அதுபோலவே,
வட்டம் PAB, $A'B'$ ஆகும்.
வட்டம் PCO, $C'O'$ ஆகும்.
ஆனால் வட்டம் $PAB \perp$ வட்டம் PCO.
$\therefore A'B' \perp C'O'$.
$\therefore \triangle A'B'C'$ இல், $A'Q'$, $C'O'$ குத்துக் கோடுகள்.
$\therefore B'O' \perp A'C'$.
ஆனால் $B'O'$, வட்டம் PBO வின் தன்மாற்று.
$A'C'$, வட்டம் PAC யின் தன்மாற்று.
$\therefore$ வட்டம் $PBO \perp$ வட்டம் PAC.

5. OA, OB, OC ஒரு வட்டத்தின் 3 நாண்கள். OA, OB, OC இவற்றை விட்டங்களாகக் கொண்ட வட்டங்களை இரண்டிரண்டாக எடுக்க அவை வெட்டும் இரண்டாவது புள்ளிகள் ஒரு நேர்கோட்டில் உள்ளவை என்று நிரூபிக்கவும்.



V படம் 36



V படம் 37

கொள்கை: (1) ஒரு வட்டம் $OABC$. OA, OB, OC நாண்கள்.

(2) OA, OB, OC ஐ விட்டங்களாகவுடைய வட்டங்கள் C_1, C_2, C_3 என்போம்.

(3) C_1, C_2 வெட்டும் புள்ளி P. C_2, C_3 வெட்டும் புள்ளி–Q C_2, C_3 வெட்டும் புள்ளி R.

நிரூபிக்க: PQR ஒரு நேர்கோடு என.

நிரூபணம்: O க்கு தன்மாற்றம் செய்க.

(1) $Q\ ABC$, $A'B'C'$ என்னும் நேர்கோடாகும்.

(2) $Q\ A$ விட்டமாகவுள்ள வட்டம் C_1 இன் தன்மாற்று A' வழி, OA வுக்குச் செங்குத்துக் கோடாகும்.

(அ-து) OA' க்குச் செங்குத்துக் கோடாகும்.

(3) அதுபோலவே, C_2', C_3'; OB', OC' க்கு B', C' வழியே செல்லும் செங்குத்துக் கோடுகளாகும்.

(4) C_1', C_2' வெட்டும் புள்ளி-P'.
C_2', C_3' வெட்டும் புள்ளி-Q'.
C_3', C_1' வெட்டும் புள்ளி-R'.

∴ தன்மாற்றுப் படத்தில்,

△ $P'Q'R'$ இன் பக்கங்கள் $P'Q'$, $Q'R'$, $R'P'$ க்கு OB', OC', OA' லம்பங்கள்.

மேலும் $A'B'C'$ ஒரு நேர்கோடு.

∴ O, வட்டம் $P'\ Q'\ R'$ இன் மேல் ஒரு புள்ளி.
($A'B'C'$ சிம்ஸன் கோடு)

∴ PQR, O வழிச் செல்லாத ஒரு நேர்கோடு.
(தேற்றம்-45)

பயிற்சி 22 (a)

1. இரண்டிரண்டாகத் தொடும் மூன்று வட்டங்களை ஒரு தொடு புள்ளிக்குத் தன்மாற்றம் செய்க.

2. இரண்டிரண்டாகத் தொடும் மூன்று வட்டங்களை அவற்றின் தொடு புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் வட்டத்துக்குத் தன்மாற்றம் செய்க.

3. ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களை அதன் குத்து மையத்துக்குத் (Orthocentre) தன்மாற்றம் செய்க. தன்மாற்றுகள் மறுபடியும் வெட்டும் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் வட்டத்தில் அவற்றின் மையங்கள் இருக்கும் எனக் காட்டுக.

4. ஒரு முக்கோணத்தையும் அதன் குத்துக் கோடு ஒரு உச்சிப் புள்ளிக்குத் (Vertex) தன் மாற்றம் செய்க.

5. இரண்டு வட்டங்கள் A யில் வெட்டுகின்றன. மூன்றுவது வட்டம் ஒரு இவை இரண்டையும் குத்தாக வெட்டுகிறது. இந்த மூன்று வட்டங்களையும் ஒரு வட்டமும் அதன் இரண்டு விட்டங்களுமாகத் தன்மாற்றம் செய்யலாம் எனக் காட்டுக.

6. ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களை அதன் சுற்றுவட்ட மையத்துக்குத் தன்மாற்றம் செய்க.

7. ஒரு செவ்வகத்தை ஒரு மூலைக்குத் (a vertex) தன் மாற்றம் செய்க.

8. இரு வட்டங்கள் C_1, C_2, O வில் தொடுகின்றன. C_3, C_4 என்னும் இரண்டு வட்டங்கள் இவற்றை O வில் குத்தாக வெட்டுகின்றன. C_1, C_2, ஐ C_3, C_4 A, B, C, D யில் வெட்டு கின்றன. A,B,C,D ஒரு வட்டத்தில் அமைவன எனக் காட்டுக.

9. இரண்டு வட்டங்களுக்கிடையே உள்ளக் கோணத்தைத் தன்மாற்றி வட்டம் இருசமக் கூறிடுகிறது என நிரூபிக்கவும்.

பயிற்சி 22 (b)

1. ABC ஒரு நேர்கோடு. P அதற்கு வெளியே ஒரு புள்ளி. வட்டம் PBC க்குக் குத்தாகவும் P, A வழியாகவும் வரையப் பட்ட ஒரு வட்டம்; வட்டம் PCA க்குக் குத்தாகவும் P, B வழியாகவும் வரையப்பட்ட வட்டம்; வட்டம் PAB க்குக் குத்தாகவும் P, C வழியாகவும் வரையப்பட்ட வட்டம் இவை மூன்றும் மற்றொருபுள்ளி வழியே செல்லும் என நிரூபிக்கவும்.

2. ஒரு செவ்வகத்தின் பக்கங்களை அதன் சுற்று வட்டத் தில் உள்ள ஒரு புள்ளிக்குத் தன்மாற்றம் செய்க. தன்மாற்று வட்டங்களின் மையங்கள் இருகுத்துக் கோடுகளில் அமையும் எனக் காட்டுக.

3. $ABCD$ ஒரு நேர்கோடு. P அதற்கு வெளியே ஒரு புள்ளி. வட்டங்கள் PAB, PCD ஒன்றையொன்று Pயில் தொடுகின்றன. வட்டம் PBC இவை இரண்டையும் குத்தாக வெட்டுகிறது. வட்டம் PAD, வட்டம் PBCயைத் தொட்டால், அது வட்டங்கள் PAB, PCD யைக் குத்தாக வெட்டுகிறது என நிரூபிக்கவும்.

4. இரு வட்டங்களை OQR என்னும் வட்டம் Q, R இல் தொடுகிறது. O,Q; O,R வழியே வட்டம் OQR ஐக் குத்தாக வெட்டும் வட்டங்கள் O வில் ஒன்றையொன்று தொடுகின்றன என நிரூபிக்கவும்.

5. இரு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று குத்தாக P யில் வெட்டுகின்றன. அவற்றை CAB என்னும் வட்டம் முறையே A, B யில் தொடுகிறது. வட்டங்கள் CPA, CPB, 45° இல் வெட்டுகின்றன என நிரூபிக்கவும்.

6. இரு வட்டங்கள் A, Bயில் வெட்டுகின்றன. அவற்றை மற்றொரு வட்டம் முறையே C, Dயில் குத்தாக வெட்டுகிறது. வட்டம் ACD, இரண்டு வட்டங்களையும் சம கோணங்களில் வெட்டுகிறது என நிரூபிக்கவும்.

7. வட்டம் OBD, வட்டங்கள் ADC ABC யைக் குத்தாக வெட்டுகிறது. வட்டம் OAC, வட்டங்கள் OAD, OCD; வட்டங்கள் OAB, OCB இவற்றைச் சமகோணங்களில் வெட்டுகிறது என நிரூபிக்கவும்.

(உதவிக் குறிப்பு — O க்குத் தன்மாற்றம் செய்க)

8. இரண்டு வட்டங்கள் A, Bயில் வெட்டுகின்றன. A, B வழியாகவும், இரண்டு வட்டங்களும் B யில் வெட்டும் கோணத்தை இரு சமக் கூறிடும் படியும் இரண்டு வட்டங்கள் வரையப்படுகின்றன. கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு வட்டங்களையும் தொடும் வட்டம் எதுவும் இந்த இரண்டு வட்டங்களில் ஒன்றைக் குத்தாக வெட்டும் என நிரூபிக்கவும்.

9. A, B, C ஒரு கோடமைப் புள்ளிகள். O அதற்கு வெளியே ஒரு புள்ளி. OP, OQ OR முறையே வட்டம் OAB, வட்டம் OBC, வட்டம் OCA இவற்றின் விட்டங்கள். P, Q, R, O ஒரு வட்டப் பரிதியில் உள்ளவை என நிரூபிக்கவும்.

10. மூன்று வட்டங்கள் ஒரு புள்ளி வழிச் செல்கின்றன. இந்த புள்ளி வழியேயும், இரண்டு வட்டங்கள் வெட்டும் மற்றொரு புள்ளி வழியேயும் மூன்றாவது வட்டத்துக்குக் குத்தாகவும் வரையப்பட்ட மூன்று வட்டங்களும் மற்றொரு புள்ளி வழிச் செல்லும் என நிரூபிக்கவும்.

11. கீழ்க் கண்ட தேற்றங்களைக் குறிப்பிட்டபடித் தன் மாற்றம் செய்க.

(1) அரை வட்டத்தில் உள்ள கோணம் 90°.
(வட்டப்பரிதியில் ஒரு புள்ளிக்கு)

(2) ஒரு முக்கோணத்தின் குத்துக்கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள்.

(a) முக்கோணத்தின் உச்சிப்புள்ளிக்கு

(b) குத்துமையத்துக்கு

(c) சுற்று வட்டத்தின் மேல் ஒரு புள்ளிக்கு

(d) சுற்று வட்ட மையத்துக்கு

12. கீழ்க்கண்ட தேற்றத்தை Oக்குத் தன்மாற்றம் செய்க.

AB யை விட்டமாகவுடைய வட்டத்தின்மேல் O ஒரு புள்ளி. P, ABயில் ஏதாவது ஒரு புள்ளி. வட்டம் OPBயை AO, Qவில் வெட்டினுல், Q, ABக்கு P வழியே வரையப்பட்ட லம்பத்தில் அமையும்.

13. ஒரு முக்கோணத்தின் சுற்று வட்டத்தை அதன் போலார் வட்டத்துக்குத் தன்மாற்றம் செய்தால் அது முக்கோணத்தின் ஒன்பது புள்ளி வட்டமாகும் எனக் காட்டுக. மேலும் D, E, F குத்தடிகள் (feet of the altitudes) என்ருல் D', E', F' A, B, C யுடன் பொருந்தும் எனக் காட்டுக.

14. ஒரு முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்டத்தின் மேல் உள்ள P என்னும் ஏதாவது ஒரு புள்ளிக்குத் தன்மாற்றம் செய்க:

$\triangle ABC$ யின் சுற்று வட்டத்தின் மேல் P ஒரு புள்ளி. P யிலிருந்து BC, CA, ABக்கு PL, PM, PN என்னும் குத்துக் கோடுகள் வரைந்தால், LMN ஒரு நேர்கோடாகும்.

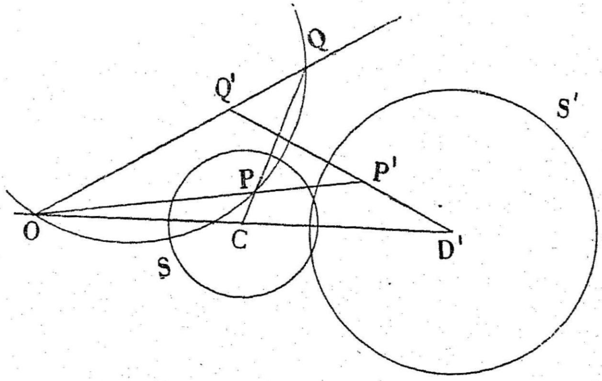
15. S_1, S_2 என்னும் வட்டங்களை $\sum$ என்னும் வட்டம் குத்தாக வெட்டுகிறது. S_1, S_2 வின் சமத்தொடு கோட்டச்சை $\sum$, Oவில் வெட்டுகிறது. Oவை மையமாகக் கொண்ட S_1 S_2வைக் குத்தாக வெட்டும் வட்டத்தைத் தன்மாற்றி வட்டமாகக் கொண்டு தன் மாற்றம் செய்து, $\sum$வின் தன் மாற்று, S_1 S_2 வின் மையப் பிணைக் கோடு (line of centres) என்று காட்டுக.

16. ஒரு தளத்தில் O, A, B, C நான்கு புள்ளிகள். $\odot OAB$, $\odot OBC$ குத்து வட்டங்களானுல், $\odot OCA$, $\odot ABC$ யும் குத்து வட்டங்களென நிரூபிக்கவும்.

17. A,B,C,D நான்கு புள்ளி. $\odot DBC$யின் மையம், DAயில் அமைகிறது. $\odot DCA$யின் மையம், DBயில் அமைகிறது என்ருல் $\odot DAB$யின் மையம், DCயில் அமையும் என் நிரூபிக்கவும்.

தேற்றம் 49

ஒரு வட்டம் அதற்கு இரண்டு தன் மாற்று புள்ளிகள் இவற்றின் தன்மாற்றுகள் மற்ருெரு வட்டமும் அதற்கு இரண்டு தன் மாற்றுப் புள்ளிகளும் ஆகும்.



V படம் 38

கொள்கை : (1) S ஒரு வட்டம் ; C அதன் மையம் ; P, Q, S இன் தன் மாற்றிப் புள்ளிகள்.

(2) O தன் மாற்றி மையம்.

(3) S', P', Q' முறையே S, P, Q வின் தன் மாற்றுகள்.

நிருபிக்க : S' க்கு P', Q' தன் மாற்றுப் புள்ளிகள் ஆகும் என.

நிருபணம் : வட்டம் S க்கு P, Q தன் மாற்றுப் புள்ளிகள்.

$\therefore$ வட்டம் $O\,Q\,P \perp$ வட்டம் S.

ஆனுல் P, P' ; Q, Q' O வுக்குத் தன்மாற்றுப் புள்ளிகள்.

$\therefore$ வட்டம் $O\,Q\,P$ யின் தன் மாற்று $P'\,Q'$ ஆகும்.

மேலும் வட்டம் $O\,P\,Q \perp$ வட்டம் S.

$\therefore$ $P'\,Q' \perp$ வட்டம் S'

$\therefore$ $P'\,Q'$, S' இன் மையமாகிய D' வழிச் செல்கிறது.

மேலும் P, Q வழிச் செல்லும் எந்த வட்டமும் S ஐக் குத்தாக வெட்டும்.

$\therefore$ P', Q' வழிச் செல்லும் எந்த வட்டமும் S'க்கு குத்தாக வெட்டும்.

$\therefore$ S' க்கு $P'\,Q'$ தன் மாற்றுப் புள்ளிகள் ஆகும்.

கிளைத் தேற்றங்கள் :

1. ஒரு வட்டத்துக்கு இரண்டு வளைவரைகள் தன் மாற்றுகளானால், இவற்றை வேறொரு புள்ளிக்குத் தன் மாற்றம் செய்யும்போது வளைவரைகளின் தன் மாற்றுகள் வட்டத்தின் தன் மாற்றுக்குத் தன் மாற்றுகள் ஆகும்.

S க்கு C_1, C_2 என்னும் வளைவரைகள் தன் மாற்றுகளானால், இவற்றின் தன் மாற்றுகள் $\sum$ க்கு, S', C_1', C_2' ஆனால், S'க்கு C_1', C_2' தன் மாற்றுகள் ஆகும்.

(C_1, C_2 விலுள்ள ஒவ்வொரு ஜதைத் தன் மாற்றுப் புள்ளிகளுக்கும், C_1', C_2' இல் ஒவ்வொரு ஜதைத் தன் மாற்றுப் புள்ளிகள் உண்டு).

2. ஒரு நேர் கோட்டுக்கு ஒரு புள்ளியின் தன் மாற்று அந்த நேர்கோட்டில் அப்புள்ளியின் பிம்பமாகும்.

வட்டம் S, அதன் தன்மாற்றுப் புள்ளிகள் P Q இவற்றை S இன் மேல் உள்ள ஒரு புள்ளி O வுக்குத் தன் மாற்றம் செய்க. S' ஒரு நேர்கோடாகும்.

S' க்கு P', Q' தன் மாற்றுப் புள்ளிகள் ஆகும்.

P', O' தன்மாற்றுப் புள்ளிகள்.

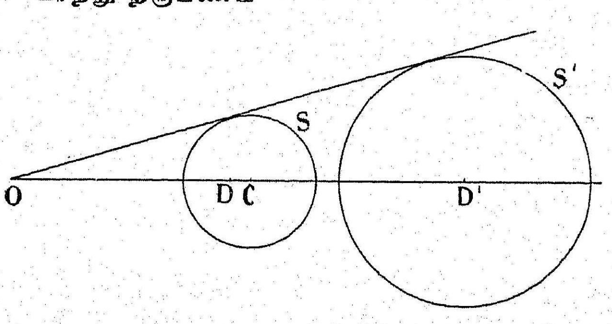
$\therefore$ P', Q' வழியே செல்லும் எந்த வட்டமும் S' ஐக் குத்தாக வெட்டும்.

(அ-து) P', Q' வழியே செல்லும் எந்த வட்டத்தின் மையமும் S' என்னும் நேர்கோட்டில் இருக்கும்.

$\therefore$ S', P' Q' இன் மையக் குத்துக்கோடு.

$\therefore$ P', O' இவை S'க்கு ஒன்றுக்கொன்று பிம்பங்கள் ஆகும்.

2. மாற்று நிருபணம்



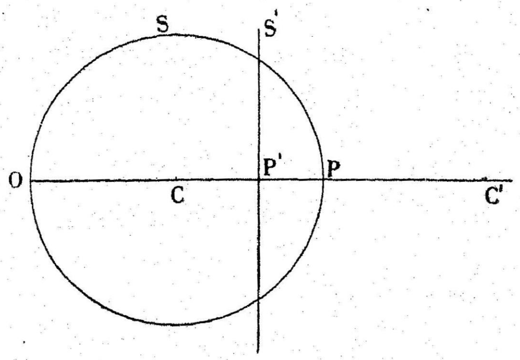
V படம் 39

⊙ S இன் மையம் C. O அதன் மேல் ஒரு புள்ளி. S க்கு C, எட்டாப்புள்ளி இவை தன் மாற்றுப் புள்ளிகள். இவற்றை O வுக்குத் தன் மாற்றம் செய்க. S இன் தன்மாற்று S' என்னும் நேர்கோடு. C இன் தன்மாற்று C' ஆனால் $OP' = P'C'$. (தேற்றம்–45 கிளை-2) எட்டாப்புள்ளியின் தன்மாற்று O ஆகும்.

∴ S' க்கு, O, C' தன்மாற்றுப் புள்ளிகள்.

(அ-து) S'க்கு O வின் தன்மாற்றுப் புள்ளி S' இல் அதன் பிம்பமாகும்.

3. ஒரு புள்ளிக்கு S, S' தன் மாற்று வட்டங்கள் என்றால், S' இன் மையம், S க்கு Oவின் தன் மாற்றுப் புள்ளியின் தன் மாற்றுப் புள்ளி ஆகும். (வேறொரு நிரூபணம்)



V படம் 40

S, S' தன்மாற்று வட்டங்கள் C, D' அவற்றின் மையங்கள். O தன்மாற்றி மையம் S க்கு Oவின் தன் மாற்று D ஆகட்டும். Oக்கு D யின் தன்மாற்று D' ஆகட்டும். D', S' இன் மையம் ஆகும்.

நிரூபணம் : S க்கு O, D தன் மாற்றுகள்.

O வுக்கு S இன் தன்மாற்று S'.

D இன் தன்மாற்று D'.

O வின் தன் மாற்று எட்டாப்புள்ளி.

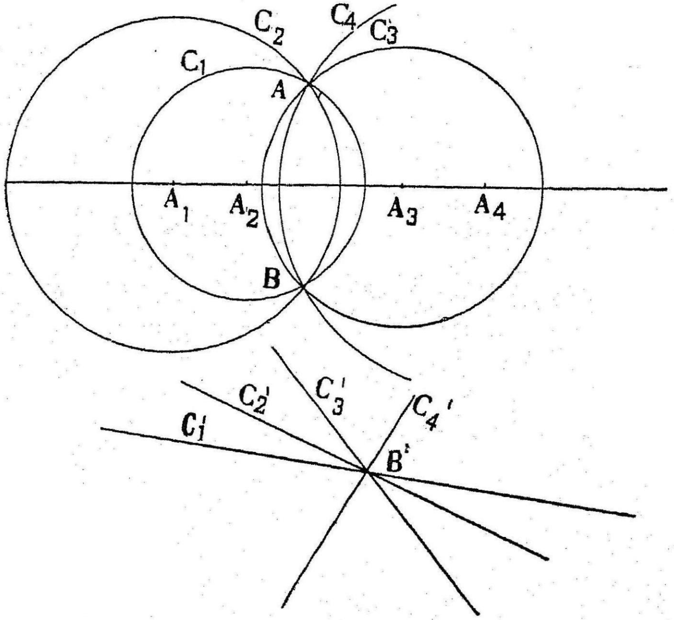
∴ S' க்கு D' உம் எட்டாப்புள்ளியும் தன்மாற்றுப் புள்ளிகள்.

∴ S' இன் மையம் D' ஆகும்.

தேற்றம் 50

ஒரு ஒரச்சு வட்டத் தொகுதியை ஒரு புள்ளிவழிக் கோடுகள் அல்லது பொது மைய வட்டங்களாகத் தன் மாற்றம் செய்யலாம்.

1. முதலில் வெட்டும் ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியை எடுத்துக் கொள்வோம்.



V படம் 41, 42

கொள்கை : C_1, C_2, C_3, C_4 வெட்டும் ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியைச் சேர்ந்த வட்டங்களாகட்டும்.

அவை A, B யில் வெட்டட்டும்.

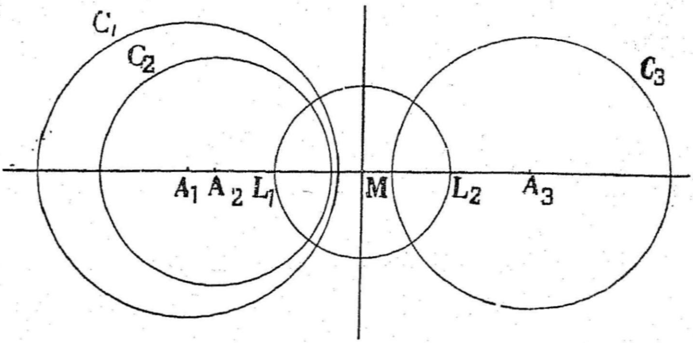
நிரூபிக்க : அவற்றை ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகளாகத் தன்மாற்றம் செய்யலாம் என.

நிரூபணம் : A க்குத் தன் மாற்றம் செய்க. எல்லா வட்டங்களும், A வழிச் செல்வதால் அவற்றின் தன் மாற்றுகள் C_1', C_2', C_3', C_4' நேர் கோடுகளாகும்.

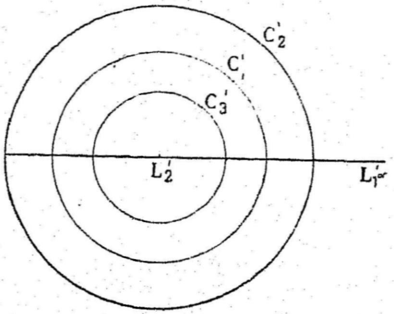
எல்லா வட்டங்களும் B வழிச் செல்வதால் அவற்றின் தன் மாற்றுகளும், B' வழிச் செல்லும்.

$\therefore$ C_1', C_2', C_3', C_4' ஒரு புள்ளிவழிக் கோடுகள்.

2. வெட்டாத ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியை எடுத்துக் கொள்வோம்.



V படம் 43



V படம் 44

கொள்கை : C_1, C_2, C_3......வெட்டாத ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியாகட்டும்.
A_1, A_2, A_3 அவற்றின் மையங்கள்
L_1, L_2 எல்லைப் புள்ளிகள்.

நிரூபிக்க : ஓரச்சு வட்டங்களைப் பொது மைய வட்டங்களாகத் தன் மாற்றம் செய்யலாம் என.

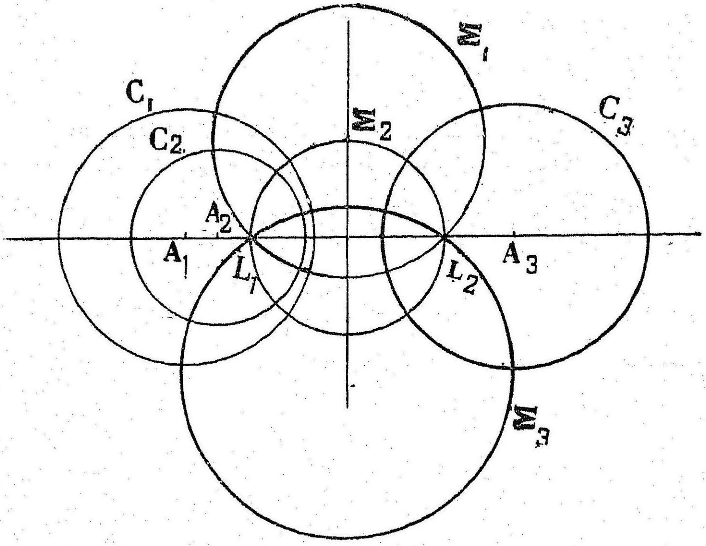
நிருபணம்: L_1 க்குத் தன்மாற்றம் செய்க. ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியிலுள்ள எல்லா வட்டங்களுக்கும் எல்லைப் புள்ளிகள் தன் மாற்றுப் புள்ளிகள் ஆகும்.

$\therefore$ C_1 க்கு L_1, L_2 தன்மாற்றுப் புள்ளிகள். இவற்றை L_1 க்குத் தன்மாற்றம் செய்தால், C_1' க்கு L_1' & L_2' தன் மாற்றுப் புள்ளிகள். (அ-து) L_2', க்கு C_1' இன் மையம்.

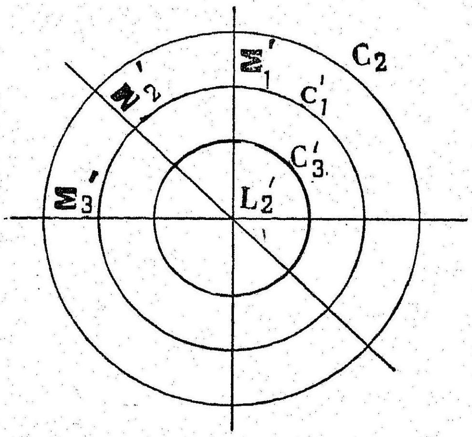
இதுபோலவே L_2', எல்லா வட்டங்களின் தன்மாற்றுகளுக்கும் மையம் என நிரூபிக்கலாம்.

$\therefore$ C_1', C_2', C_3'......... L_2' ஐப் பொது மையமாகக் கொண்ட வட்டங்கள்.

மாற்று நிரூபணம்



V படம் 45



V படம் 46

நிருபணம் :

L_1, L_2 வழியாக C_1, C_2, C_2 இவற்றைக் குத்தாக வெட்டும் வட்டங்கள் $\sum_1$, $\sum_2$, $\sum_3$ ....வரைக.

L_1 க்குத் தன்மாற்றம் செய்க.

$\sum_1$, $\sum_2$, $\sum_3$ .... L_2 வழிச் செல்வதால்,
$\sum_1'$, $\sum_2'$, $\sum_3'$ .... L_2' வழிச் செல்லும்.

$\sum_1$, C_1 ஐக்குத்தாக வெட்டுகிறது.

$\therefore$ $\sum_1{}^1$, C_1' ஐக் குத்தாக வெட்டும்.

$\therefore$ $\sum_1'$, C_1' இன் மையம் வழிச் செல்லும்.

$\therefore$ $\sum_2'$, $\sum_3'$ .... C_1' இன் மையம் வழிச் செல்லும்.

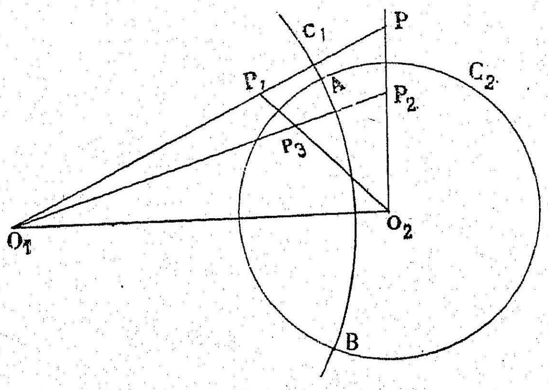
$\sum_2'$, $\sum_3'$ இவற்றின் வெட்டும் புள்ளியான
$\therefore$ L_2', C_1' இன் மையம்.

அதுபோலவே L_2', C_2', C_3' .... முதலிய வட்டங்களின் பொது மையம் என நிருபிக்கலாம்.

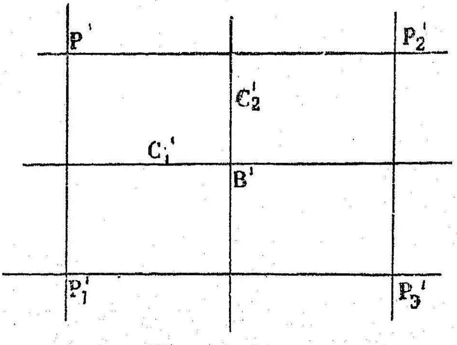
$\therefore$ $C_1{}^4$, C_2', C_3' .... பொது மைய வட்டங்கள்.

மாதிரிகள்

1. C_1, C_2 இரண்டு குத்து வட்டங்கள். ஒரு வளைவரை C யை முதலில் C_1 க்கும் பிறகு C_2 க்கும் தன்மாற்றம் செய்தாலும், அல்லது முதலில் C_2 க்கும் பிறகு C_1 க்கும் தன்மாற்றம் செய்தாலும் ஒரே படம் தான் கிடைக்கும் என நிருபிக்கவும்.



V படம் 47



V படம் 48

கொள்கை : (1) வட்டங்கள் (O_1), (O_2) குத்து வட்டங்கள். அவை A, B யில் வெட்டட்டும்.

(2) P ஏதாவது ஒரு புள்ளி ஆகட்டும். அவற்றை C_1 C_2 என்போம்.

(3) C_1 க்கு P யின் தன் மாற்றுப் புள்ளி P_1.
C_2 க்கு P யின் தன் மாற்றுப் புள்ளி P_2.
C_2 க்கு P_1 இன் தன் மாற்றுப் புள்ளி P_3.

நிருபிக்க : C_1 க்கு P_2 இன் தன் மாற்றுப் புள்ளி P_3 என.

நிருபணம் : A க்குத் தன்மாற்றம் செய்க.
C_1', C_2' இரண்டும் நேர்கோடுகளாகும்.
$C_1 \perp C_2$ அவை B யில் வெட்டுகின்றன.
$\therefore$ $C_1'C_2'$ இரண்டும் B' ல் குத்தாக வெட்டும்.
P யின் தன்மாற்றுப் புள்ளி P' ஆகட்டும்.
P, P_1 என்னும் புள்ளிகள் C_1 க்குத் தன் மாற்றிகள்
$\therefore$ P', P_1', C_1' க்குத் தன் மாற்றிகள் ஆகும்.
$\therefore$ P_1', C_1' இல் P' இன் பிம்பமாகும்.

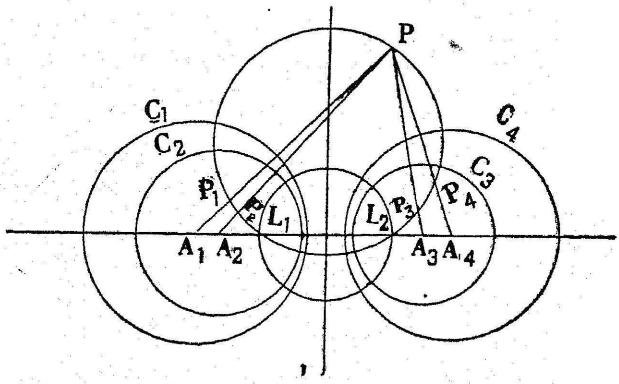
அதுமாதிரியே
P_2', C_2' இல் P' இன் பிம்பமாகும்.
P_3', C_2' இல் P_1' இன் பிம்பமாகும்.
ஆனல் $C_1' \perp C_2'$.
$\therefore$ $P'P_2'$, $P_1'P_3'$ க்கு இணையும் சமமாகும்.
$\therefore$ நாற்கரம் $P'P_1'P_3'P_2'$ இல்
$P'P_1'$, $P_2'P_3'$ இவையும் இணையும் சமமுமாகும்.
$\therefore$ P_3', C_1' இல் P_2' இன் பிம்பமாகும்.

∴ C_1க்கு, P_2, P_3 தன்மாற்றுப் புள்ளிகள் ஆகும்.

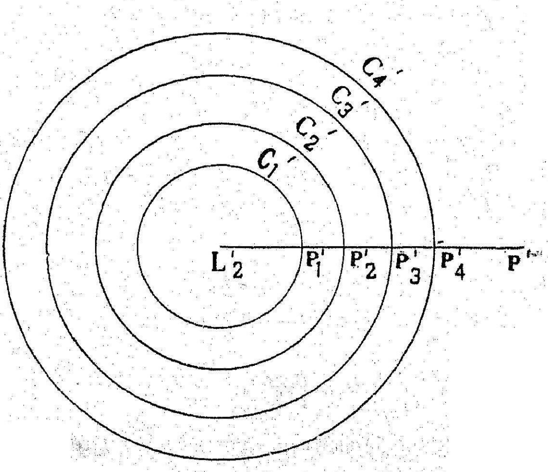
∴ P என்னும் புள்ளியை முதலில் C_1 ஆகும். பிறகு C_2க்குத் தன்மாற்றம் செய்தாலும், முதலில் C_2 பிறகு C_1க்குத் தன் மாற்றம் செய்தாலும் ஒரே புள்ளி P_3 தான் கிடைக்கிறது.

∴ ஒரு வளைவரையை எடுத்துக் கொண்டாலும் C_1, C_2க்கு எந்த வரிசையிலும் (in any order) தன்மாற்றம் செய்த பிறகு ஒரே வளைவரைதான் கிடைக்கும்.

2. C_1, C_2, C_3, C_4 ஓரச்சு வட்டங்கள். அவற்றுக்கு Pயின் தன்மாற்றுகள் முறையே P_1, P_2, P_3, P_4 ஆகும. $P_1P_2P_3P_4$ ஒரு வட்ட நாற்கரம் என நிரூபிக்கவும்.



V படம் 49



V படம் 50

கொள்கை : (1) C_1, C_2, C_3, C_4 ஓரச்சு வட்டங்கள்.

(2) P ஏதாவது ஒரு புள்ளி.

(3) P_1, P_2, P_3, P_4 முறையே P யின் தன்மாற்றுப் புள்ளிகள்.

நிரூபிக்க : P_1, P_2, P_3, P_4 ஒரு வட்டப் பரிதியில் உள்ளவை என.

நிரூபணம் : ஓரச்சு வட்டங்களின் எல்லைப் புள்ளிகள் L_1, L_2 ஆகட்டும்.

L_1 க்குத் தன்மாற்றம் செய்க.

C_1', C_2', C_3', C_4' பொது மைய வட்டங்களாகும்.

P யின் தன்மாற்று P' ஆகட்டும்.

C_1, C_2, C_3, C_4 க்கு, P_1, P_2, P_3, P_4, P யின் தன்மாற்றுப் புள்ளிகள்.

∴ C_1', C_2', C_3', C_4' க்கு P_1', P_2', P_3', P_4' P_1' இன் தன்மாற்றுப் புள்ளிகள் ஆகும். (தேற்றம் 40)

ஆனால் C_1' C_2', C_3', C_4' பொது மைய வட்டங்கள்.

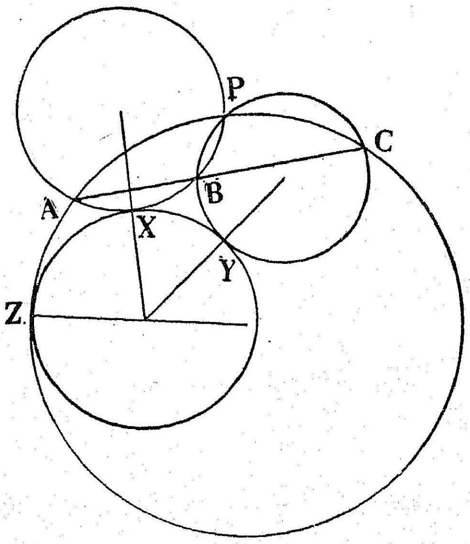
∴ P_1', P_2', P_3', P_4', OP' இல் அமைகின்றன.

∴ அவை ஒரு கோடமைப் புள்ளிகள்.

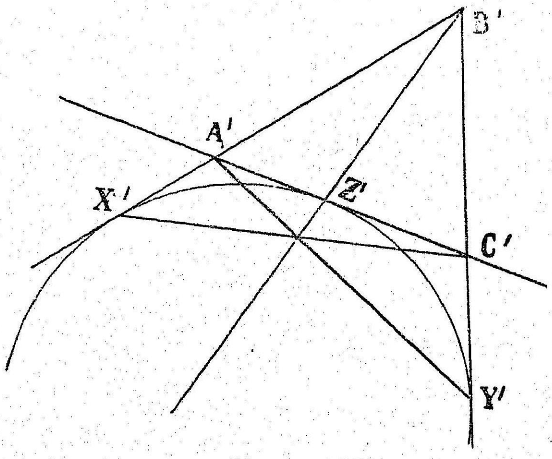
∴ P_1, P_2, P_3, P_4 L_1 வழிச் செல்லும் ஒரு வட்டமாகும்.

∴ P_1, P_2, P_3, P_4 ஒரு வட்டப் பரிதியில் அமைவன.

3. ABC ஒரு நேர்கோடு. வட்டங்கள் PAB, PBC, PCA மற்றொரு வட்டத்தை X, Y, Z இல் தொடுகின்றன. வட்டங்கள் PAY, PBZ, PCX ஓரச்சு வட்டங்கள் என நிரூபிக்கவும்.



V படம் 51



V படம் 52

கொள்கை: (1) ABC ஒரு நேர்கோடு. P அதற்கு வெளியே ஏதாவது ஒரு புள்ளி.

(2) $\odot PAB$, $\odot PBC$, $\odot PCA$ ஐ வட்டம் XYZ, முறையே X, Y, Z இல் தொடுகிறது.

நிரூபிக்க : $\odot PAY$, $\odot PBZ$, $\odot PCX$ ஓரச்சு வட்டங்கள் என நிரூபிக்க.

நிரூபணம் : P க்குத் தன்மாற்றம் செய்க.

$\odot PAB$, $\odot PBC$, $\odot PCA$ நேர்கோடுகள் $A'B'$, $B'C'$; $C'A'$ ஆகின்றன.

$\odot XYZ$, $A'B'$, $C'A'$, $A'B'$ ஐத் தொடும் ஒரு வட்டமாகிறது.

இங்கு B' க்கு எதிரே உள்ள வெளி வட்டம் என்போம்.

X', Y', Z' வெளிவட்டம் பக்கங்களைத் தொடும் புள்ளிகள்.

$\therefore$ $A'Y'$, $B'Z'$, $C'X'$ ஒரு நடுப்புள்ளி வழிச் செல்லும்.

$\therefore$ $\odot PAY$, $\odot PBZ$, $\odot PCX$ இவை மற்றொரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றன.

(அ-து) அவை இரண்டு புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன.

$\therefore$ அவை வெட்டும் ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியாகும்.

பயிற்சி 23 (a)

1. ஒரு வட்டத்தையும் அதற்கு இரண்டு தன்மாற்றுப் புள்ளிகளையும் ஒரு நேர்கோடும் அதற்கு ஒன்றுக்கொன்று பிம்பமாயுள்ள இரண்டு புள்ளிகளுமாகத் தன்மாற்றம் செய்யலாம் எனக் காட்டுக.

2. ஒரு வட்டம், அதன் இரண்டு தன்மாற்றுப் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் மற்றொரு வட்டம் இவற்றை

(1) முதல் வட்டத்துக்கு

(2) முதல் வட்டத்தின் மேல் ஒரு புள்ளிக்குத் தன்மாற்றம் செய்க.

3. இரு வட்டங்கள் S, S' ஒன்றுக்கொன்று அதன் மாற்று வட்டங்கள். அவற்றில் ஒரு புள்ளிக்கு அவற்றைத் தன் மாற்றம் செய்க.

4. இரு வட்டங்களை மற்றொரு வட்டம் குத்தாக வெட்டுகின்றது. அவற்றை முதலிரண்டு வட்டங்கள் வெட்டும் புள்ளிக்குத் தன்மாற்றம் செய்க.

5. ஒரு வட்டம் இரு வெட்டும் வட்டங்களைக் குத்தாக வெட்டினால் அவற்றின் வெட்டுப் புள்ளிகள் முதல் வட்டத்துக்குத் தன்மாற்றுப் புள்ளிகள் என நிரூபிக்கவும்.

6. ஒரு வட்டத்துக்கு ($\sum$) P, P'; Q, Q' தன்மாற்றுப் புள்ளிகள். O, $\sum$ வின் மேல் ஒரு புள்ளி. தன்மாற்றம் செய்து கீழ்க்கண்டவற்றை நிரூபிக்கவும்.

(1) வட்டம் OPP', வட்டம் OQQ' தொடு வட்டங்கள்.

(2) வட்டம் OPQ, வட்டம் $OP'Q'$, வட்டம் $\sum$ ஓரச்சு வட்டங்கள்.

(3) வட்டம் OPQ', வட்டம் $OP'Q$, வட்டம் $\sum$ ஓரச்சு வட்டங்கள்.

7. இரண்டு வட்டங்கள் S, S' ஒன்றுக்கொன்று தன்மாற்றிகளானல் தன்மாற்றி வட்டம் எது?

8. இரண்டு வட்டங்களைப் பொது மைய வட்டங்களாகத் தன்மார்றம் செய்க.

9. மூன்று வட்டங்களை (1) மூன்று நேர்கோடுகளாக எப்பொழுது தன்மாற்றம் செய்யலாம்? (2) மூன்று ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகளாக எப்போது தன்மாற்றம் செய்யலாம்?

ஒவ்வொன்றிலும் தன்மாற்றி மையம் என்ன என்று குறிப்பிடுக.

10. இரண்டு வட்டங்களையும் அவற்றைக் குத்தாக வெட்டும் ஒரு வட்டத்தையும் முதலிரண்டு வட்டங்களின் எல்லைப் புள்ளி ஒன்றுக்குத் தன் மாற்றம் செய்க.

பயிற்சி 23 (b)

1. S, S' என்னும் வட்டங்கள், வட்டம் $\sum$ க்குத் தன் மாற்றுகள். $\sum$ வின் மேல் ஒரு புள்ளிக்குத் தன் மாற்றம் செய்தால் S, S_1 இன் தன் மாற்றுகள் சம வட்டங்கள் என நிரூபிக்கவும்.

2. வட்டம் S க்கு S_1, S_2 என்னும் வட்டங்கள் தன்மாற்றுகள். S ஐ வட்டம் $\sum$ குத்தாக வெட்டுகிறது. $\sum$ க்கு S_1, S_2 வின் தன் மாற்றுகள் S_1', S_2' ஆகும். S க்கு, S_1', S_2' தன் மாற்றுகள் என நிரூபிக்கவும்.

(உதவிக் குறிப்பு—S, $\sum$ வெட்டும் புள்ளிக்குத் தன் மாற்றம் செய்க.)

3. $\sum$ என்னும் வட்டத்துக்கு S_1, S_2 தன் மாற்றுகள். S_1, S_2 ஐத் தொடும் வட்டங்கள், $\sum$ ஐக் குத்தாக வெட்டும் என நிரூபிக்கவும்.

4. தன்மாற்று முறையை உபயோகித்து இரண்டு கொடுக்கப்பட்ட வட்டங்களைக் குத்தாக வெட்டும்படியும் ஒரு கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி வழியே செல்லும்படியும் ஒரு வட்டம் வரையும் முறையைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

5. இரண்டு வட்டங்களையும் அவற்றைத் தொடும் வட்டங்களையும் முதலிரண்டு வட்டங்களின் எல்லைப் புள்ளிக்குத் தன் மாற்றம் செய்க. தொடும் வட்டங்களின் தன் மாற்றுகள் இரண்டு தொகுதி சம வட்டங்களாகும் (two sets of equal circles) என நிரூபிக்கவும்.

6. இரண்டு கொடுக்கப்பட்ட வட்டங்களுடன் ஓரச்சுள்ளதும், அவை இரண்டையும் வெளிப்புறமாகத் தொடும் எல்லா வட்டங்களையும் குத்தாக வெட்டும்படியும் ஒரு வட்டம் வரைய முடியும் என நிரூபிக்கவும்.

7. ஒரு கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்தை ஒரு குறிப்பிட்ட கோணத்தில் வெட்டும்படியும் ஒரு கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி வழிச் செல்லும்படியும் ஒரு வட்டம் வரைந்தால் அது கொடுக்கப்பட்ட புள்ளியை எல்லைப் புள்ளியாகவும் கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்தைக் கொண்டதுமான ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியிலுள்ள ஒரு வட்டத்தை எப்பொழுதும் தொடும் என நிரூபிக்கவும்.

8. ஒரு ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியின் எல்லைப் புள்ளி L ஒரு வட்டம், C, இந்த வட்டங்களை வெட்டுகிறது. L வழியாகவும், ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியில் ஏதாவது ஒரு வட்டத்தை C வெட்டும் புள்ளிகள் வழியாகவும் வரையப்படும் வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று L இல் தொடும் எனக் காட்டுக.

9. ஒரு புள்ளி வழியே செல்லும் மூன்று வட்டங்கள் கொடுத்திருக்க, அவற்றில் இரண்டுடன் ஓரச்சுள்ளதும் மூன்றாவதைக் குத்தாக வெட்டுவதுமான மூன்று வட்டங்களும் ஓரச்சு வட்டங்களென நிரூபிக்கவும்.

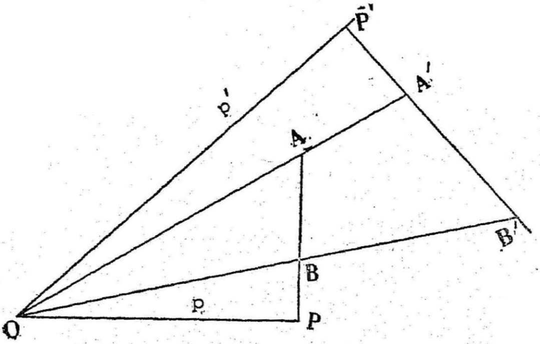
10. C_1, C_2, C_3, C_4 ஓரச்சு வட்டங்கள். P ஏதாவது ஒரு புள்ளி. P_1, C_1 க்கு P யின் தன்மாற்றுப் புள்ளி P_2, C_2 க்கு, P_1 இன் தன்மாற்றுப் புள்ளி. P_3, C_3 க்கு P_2 இன் தன் மாற்றுப்

புள்ளி. P_4, P_5............ இப்படிக் கண்டுபிடிக்கப்பட்ட புள்ளிகள். P_1, P_2, P_3, P_4 .... ஒரு வட்டப் பரிதியில் அமையும் புள்ளிகள் என நிரூபிக்கவும்.

தேற்றம் 51

O மையமும் r ஆரமும் உள்ள தன்மாற்றி வட்டத்துக்கு, A, B யின் தன்மாற்றுப் புள்ளிகள் A', B' ஆனால்

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OA \cdot OB}{r^2} = \frac{r^2}{OA' \cdot OB'}$$



V படம் 53

கொள்கை:

(1) O தன்மாற்றி மையம். தன்மாற்றி ஆரம் r.

(2) A, A'; B, B' தன்மாற்றுப் புள்ளிகள்.

நிரூபிக்க:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OA \cdot OB}{r^2} = \frac{r^2}{OA' \ OB}$$ என.

நிரூபணம்:

OAA_1, OBB' ஐச் சேர்க்கவும். O விலிருந்து AB, $A'B'$ க்கு OP, OP' குத்துக் கோடுகள் வரைக. $OP = p$, $OP' = p'$ ஆகட்டும்.

A, A' தன்மாற்றுப் புள்ளிகள்.

$\therefore \ OA \cdot OA' = r^2$.

B, B' தன்மாற்றுப் புள்ளிகள்.

$\therefore \ OB \cdot OB' = r^2$.

$$\therefore \quad OA \cdot OA' = OB \cdot OB'.$$

$$\therefore \quad \frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'}.$$

மேலும் $\angle AOB = \angle A'OB'$.

$$\therefore \quad \triangle AOB \parallel \triangle A'OB'.$$

$$\frac{OA}{OB'} = \frac{OB}{OA'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{p}{p'}.$$

முதலிரண்டு விகிதங்களின் பகுதி தொகுதிகளை முறையே OB, OB' ஆல் பெருக்க.

$$\therefore \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{OA.OB}{OB \cdot OB'} = \frac{OB \cdot OB'}{OA' \cdot OB'} = \frac{p}{p'}$$

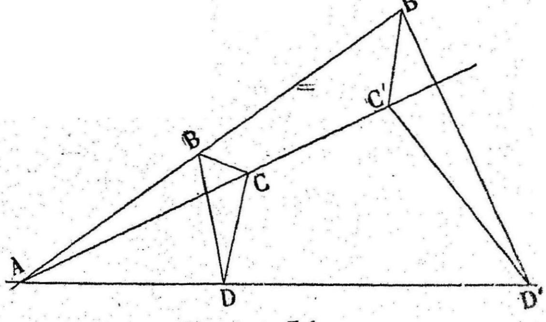
$$\therefore \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{OA \cdot OB}{r^2} = \frac{r^2}{OA' \cdot OB'} = \frac{p}{p'}$$

குறிப்பு.

இதிலிருந்து தன்மாற்றி வட்டமும் AB யும் கொடுத்திருந்தால், $A'B'$ கண்டுபிடிக்கலாம்.

கிளைத் தேற்றம்

எந்த நாற்கரத்திலும், எதிர்ப் பக்கங்களின் பெருக்கற் பலன்களின் கூட்டுத் தொகை, மூலை விட்டங்களின் பெருக்கற் பலனுக்குக் குறையாது.



V படம் 54

கொள்கை:

$ABCD$ ஒரு நாற்கரம்.

நிரூபிக்க :

$AB \cdot CD + AD \cdot BC \nless AC \cdot BD$ என.

நிரூபணம் :

B, C, D யை A க்குத் தன்மாற்றம் செய்க. B', C', D' அவற்றின் தன்மாற்றுப் புள்ளிகள் ஆகட்டும்.

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{r^2}{AB' AC'}. \qquad \text{(தேற்றம் 51)}$$

$$\therefore \; BC = \frac{r^2}{AB' \, AC'} \cdot B'C'$$

அதுபோலவே $CD = \dfrac{r^2}{AC' \cdot AD'} \cdot C'D'$

$$BD = \frac{r^2}{AB' \, AD'} \cdot B'D'$$

மேலும் $AB = \dfrac{r^2}{AB'}$. (B, B' தன்மாற்றுப்புள்ளி)

$$AC = \frac{r^2}{AC'}.$$

$$AD = \frac{r^2}{AD'}.$$

$$\therefore \; AB \cdot CD + AD \cdot BC = \frac{r^2}{AB'} \cdot \frac{r^2 \cdot C'D'}{AC' AD'} + \frac{r^2}{AD'} \cdot \frac{r^2 B'C'}{AB' \, AC'}$$

$$= \frac{r^4 \cdot C'D'}{AC' \cdot AD' \cdot AB'} + \frac{r^4 \cdot B'C'}{AB' \cdot AC' \cdot AD'}$$

$$= \frac{r^4}{AB' \cdot AC' \cdot AD'} (C'D' + B'C')$$

$$\nless \frac{r^4}{AB' \cdot AC' \cdot AD'} \cdot B'D' \qquad (\triangle \, B'C'D' \text{ இல்}) \; (B'C' + C'D' > B'D')$$

ஆனால் $AC \cdot BD = \dfrac{r^2}{AC'} \cdot \dfrac{r^2 \cdot B'D'}{AB' \cdot AD'}$

$$= \frac{r^4 \; B'D'}{AB' \cdot AC' \cdot AD'}$$

$$\therefore \; AB \cdot CD + AD \cdot BC \nless AC \cdot BD.$$

குறிப்பு

ABCD வட்ட நாற்கரமாக இருந்தால், *ABCD* யின் தன் மாற்று $B'C'D'$ என்னும் நேர்கோடாகும். அப்பொழுது $B'C' + C'D' = B'D'$.

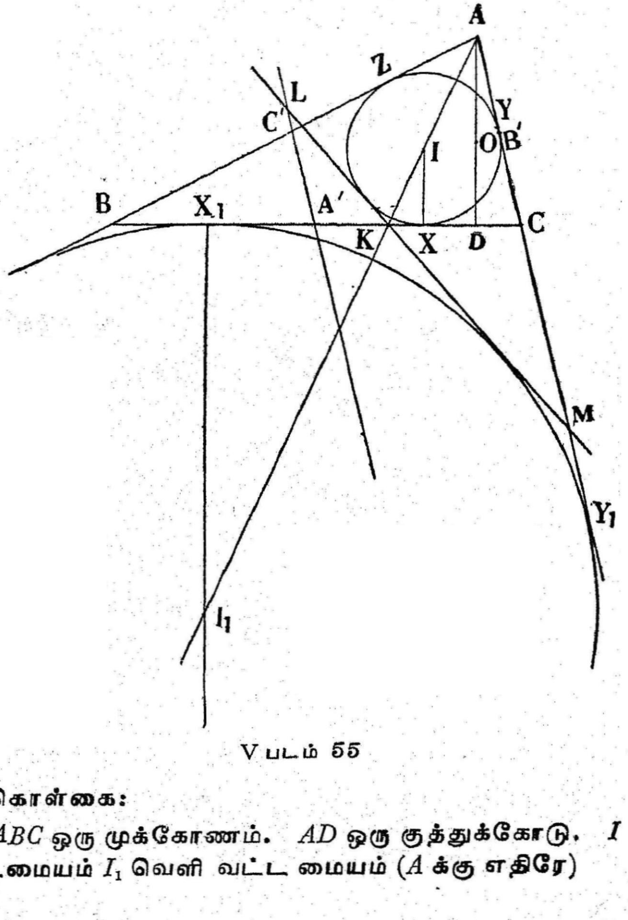
$\therefore AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD.$

இது தாலமியின் (Ptolemy's) தேற்றம் எனப்படும்.

தேற்றம் 52

∴ **போயர்பாக்ஸ் தேற்றம்** (Feuerbagh's Theorem)

ஒரு முக்கோணத்தின் ஒன்பது புள்ளி வட்டம் அதன் உள் வட்டம் வெளி வட்டங்கள் இவற்றைத் தொடுகிறது.



V படம் 55

கொள்கை:

ABC ஒரு முக்கோணம். *AD* ஒரு குத்துக்கோடு. *I* உள் வட்டமையம் I_1 வெளி வட்ட மையம் (*A* க்கு எதிரே)

A', B', C' பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள். உள் வட்டம் BC யை X இல் தொடுகிறது. வெளி வட்டம் (4) BC யை X_1 இல் தொடுகிறது. AII_1, BC யை K யில் வெட்டுகிறது.

⊙ $A' B' C'$ – 9 புள்ளி வட்டம்.

நிரூபிக்க:

9- புள்ளி வட்டம், உள் வட்டம் வெளி வட்டங்களைத் தொடுகின்றது என்று.

நிரூபணம்:

K வழி உள் வட்டத்துக்கு ஒரு தொடுகோடு வரைக. அது $A'C'$ ஐ L இலும், AC யை M இலும், வெட்டட்டும்.

$C' D$ யைச் சேர்க்கவும்.

1. K, உள் வட்டம், வெளி வட்டம் (I_1) க்கு வடிவொப்பு மையம்.

BC, வட்டங்களுக்குப் பொதுத் தொடுகோடு.

AII_1 வட்டமையங்களை இணைக்கும் கோடு.

∴ K உள் வடிவொப்பு மையம்.

2. ∴ K, யிலிருந்து உள் வட்டத்துக்கு வரையப்பட்ட தொடுகோடு வெளி வட்டம் (I_1) யும் தொடுகிறது.

3. $(D\,X\,K\,X_1) = -1$.

BI, BI_1 கோணம் B யின் இருசம வெட்டிகள்.

∴ $(A\,I\,K\,I_1) = -1$.

மேலும் AD_1 IX, I_1X_1, BC க்குக் குத்துக் கோடுகள்.

∴ $(D\,X\,K\,X_1) = -1$.

4. A', XX_1 இன் நடுப்புள்ளி.

$BX_1 = CX = s-c$.

$BA', = CA'$. ($A' = BC$ யின் நடுப்புள்ளி)

∴ $BA'-BX_1 = A'C-XC$.

∴ $X_1A' = A'X_1$.

5. $LC'KD$ ஒரு வட்ட நாற்கரம்.

$A'C' \parallel AC$.

∴ $\angle\ C'LK = \angle\ KMC$ (ஒன்று விட்ட கோணங்கள்).

வட்டம் (I_1), வட்டம் (I) க்கு வெளிப் பொதுத் தொடுகோடுகள் AB, AC. உள் பொதுத் தொடுகோடுகள் BC, $\angle M$.

∴ AB, BC க்கு இடையே உள்ள கோணம் $= AC$, LM க்கு இடையே உள்ள கோணம்.

$\therefore \angle B = \angle AMC.$

$\triangle$ ABD யில் $\angle D = 90$; C', AB யின் நடுப்புள்ளி.

$$\therefore C'D = C'B$$

$$\therefore \angle B = \angle C'DB.$$

$$\therefore \angle C'LK = \angle KMC = \angle B = \angle C'DB.$$

$\therefore$ $C'LDK$ வட்ட நாற்கரம்.

6. $A'L. A'C = A'K \cdot A'D.$

7. XX_1 விட்டமாகவுள்ள வட்டத்துக்கு, K, D; L, C' தன்மாற்றுப் புள்ளிகள்.

3, 4 இலிருந்து,

$A'X^2 = A'X_1^2 = A'D \cdot A'K.$

$\therefore$ XX_1 விட்டமாகவுடைய வட்டத்துக்கு K, D தன்மாற்றுப் புள்ளிகள்.

ஆனல் $A'L. A'C = A'K \cdot A'D$

$\therefore$ $A'L. A'C = A'X^2.$

$\therefore$ XX_1 விட்டமாகவுடைய வட்டத்துக்குத் L, C'. தன்மாற்றுப் புள்ளிகள்.

8. இப்பொழுது XX_1 ஐ விட்டமாகவுடைய வட்டத்துக்குத் தன்மாற்றம் செய்க.

A' தன்மாற்றி மையம். (4)

K, D தன்மாற்றுப் புள்ளிகள். (7)

$\therefore$ D யின் தன்மாற்று K ஆகும்.

C', L தன்மாற்றுப் புள்ளிகள்

$\therefore$ C' இன் தன்மாற்று L ஆகும்.

$\therefore$ வட்டம் $A'DC'$ இன் தன்மாற்று,

KL என்னும் நேர்கோடாகும்.

ஆனல் வட்டம் $A'DC'$, 9-புள்ளி வட்டம்.

$\therefore$ 9- புள்ளி வட்டத்தின் தன்மாற்று KL ஆகும்.

XX_1 ஐ விட்டமாகவுடைய வட்டம், உள் வட்டம், வெளி வட்டம் (I_1), இவற்றைக் குத்தாக வெட்டுகிறது.

$\therefore$ இந்த வட்டத்துக்கு வட்டம் (I), வட்டம் (I_1) இன் தன்மாற்றுகள் அவையே.

ஆனல் 9 புள்ளி வட்டத்தின் தன்மாற்று KC, $\odot(I)$, $\odot(I_1)$ இன் தன்மாற்றுகளைத் தொடுகிறது. (2)

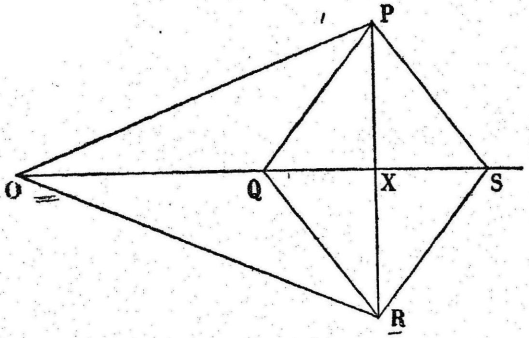
$\therefore$ 9 புள்ளி வட்டம், வட்டம் (I) வட்டம் (I_1) ஐத் தொடுகிறது.

9. இதுபோலவே, 9 புள்ளி வட்டம், வட்டம் (I_2) வட்டம் (I_3) ஐத் தொடும் என்று நிருபிக்கலாம். (நி.வே.)

மாதிரிகள்

பாய்ஸெல்லியர்ஸ் ஸெல் (Peaucelliers Cell)

நான்கு சமகோல்களை முனைகளில் இணைத்து $PQRS$ என்னும் சாய்சதுரம் செய்யப்பட்டிருக்கிறது. $P'R$ இரண்டு எதிர் முனைகளும் OP, OR என்னும் சமகோல்களால் இணைக்கப் பட்டிருக்கின்றன. O நிலைத்த புள்ளியானல், Q, S இவற்றின் நியமப் பாதைகள் O க்குத் தன்மாற்றுகளாகும் என நிரு பிக்கவும்.



V படம் 56

கொள்கை:

(1) $PQRS$ ஒரு சாய்சதுரம்.

(2) $OP = OR$.

(3) O நிலைத்த புள்ளி. P, Q, R, S மாறும் போது $PQ = QR = RS = SP$ மாருது.

நிருபிக்க:

PR, QS, X இல் வெட்டட்டும்.

எப்போதும்

$$\left.\begin{aligned} OP &= OR. \\ PQ &= QR. \\ PS &= RS. \end{aligned}\right\} OP, OR, PQ, QR, RS, SP \text{ மாருது.}$$

∴ O, Q, S, PR இன் நடுக்குத்துக் கோட்டில் இருக்கும்.

∴ O, Q, S நேர்கோடு.

$$OQ.\ OS = (OX-XQ)\ (OX+XS)$$
$$= OX^2-XQ^2$$
$$= OP^2-PQ^2.$$
$$= OP^2-PQ.$$
$= $ மாறிலி.

$\therefore$ Q, S தனமாற்றுப் புள்ளிகள்.

$\therefore$ S இன் நியமப் பாதை.

O க்கு, Q வின் நியமப்பாதையின் தன்மாற்று. (நி.வே)

2. A, B, C, D ஒரு நேர்சோட்டில் நான்கு புள்ளிகள். O க்கு அவற்றின் தன்மாற்றுப் பள்ளிகள் A', B', C', D'.

$$\frac{AB\ .\ CD}{AC\ .\ BD} = \frac{A'B'\ .\ C'D'}{A'C'\ .\ B'D'}$$

என நிருபித்கவும்.

நிருபணம் :

$$A'\ B' = \frac{r^2\ .\ AB}{OA\ .\ OB}. \qquad \text{(தேற்றம் 51)}$$

$$C'\ D' = \frac{r^2\ .\ CD}{OC\ .\ OD}.$$

$$A'\ C' = \frac{r^2\ .\ AC}{OA\ .\ OC}$$

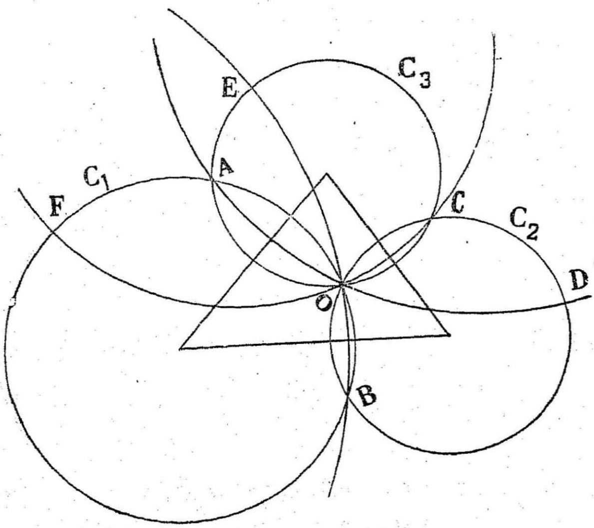
$$B'\ D' = \frac{r^2\ .\ BD}{OB\ .\ OD}$$

$$\therefore \quad \frac{A'B'\ .\ C'D'}{A'C'\ .\ B'D'} = \frac{\dfrac{r^2\ .\ AB}{OA.OB}\cdot\dfrac{r^2\ .\ CD}{OC.OD}}{\dfrac{r^2\ .\ AC}{OA.OC}\cdot\dfrac{r^2\ .\ BD}{OB.OD}}$$

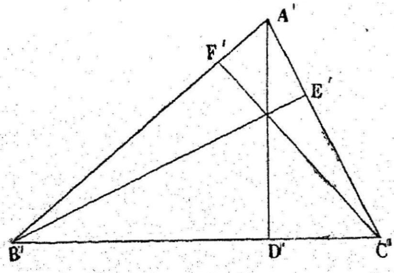
$$= \frac{AB\ .\ CD}{AC\ .\ BD}$$

3. மூன்று வட்டங்கள் O வழிச் செல்கின்றன. அவை இரண்டிரண்டாக A, B, C யில் வெட்டுகின்றன. O, A வழியே மூன்ருவது வட்டம் OBC யை குத்தாக வெட்டும் வட்டம் அதை D யில் வெட்டுகிறது. அதுபோலவே $O, B, O, C,$ வழியே $\odot\ OAC$, $\odot\ OAB$ யைக் குத்தாக வெட்டும் வட்டங்கள் அவற்றை E, F இல் வெட்டுகின்றன. என நிருபிக்கவும்.

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB} = 1.$$



V படம் 57



V படம் 58

கொள்கை : (1) ⊙ OAB, ⊙ OBC, ⊙ OCA மூன்று வட்டங்கள். C_1, C_2, C_3 என்போம்.

(2) O, A வழியே C_2க்குக் குத்து வட்டம் C_2 வை D யில் வெட்டுகிறது.

(3) O, B வழியே C_3 க்குக் குத்து வட்டம் C_3 யை E இல் வெட்டுகிறது.

(4) O, C வழியே C_1 க்குக் குத்து வட்டம் C_1 ஐ F இல் வெட்டுகிறது.

நிருபிக்க :

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1.$$

நிருபணம் : $\odot$ க்குத் தன்மாற்றம் செய்க.
$\odot\ OAB$, $\odot\ OBC$, $\odot\ OCA$. முறையே $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ ஆகும்.
$\odot OAD$, $A'D'$ ஆகும்.
மேலும் $\odot\ OAD \perp \odot\ OBC$.
$\therefore\ A'D' \perp B'C'$.
அதுபோலவே
$B'E' \perp C'A'$
$C'F' \perp A'B'$.
$\therefore\ A'D', B'E', C'F'$; $\triangle A'B'C'$ இன் குத்துக் கோடுகள்.
$\therefore$ அவை O' இல் சந்திக்கும்.

$$\therefore \quad \frac{B'D'}{D'C'} \cdot \frac{C'E'}{E'A'} \cdot \frac{A'F'}{F'B'} = 1.$$

இப்பொழுது $BD = \dfrac{r^2 \cdot B'D'}{OB' \cdot OD'}$ (தேற்றம் 51)

அதுபோலவே மற்ற கோடுகளுக்கும் பிரதியிட

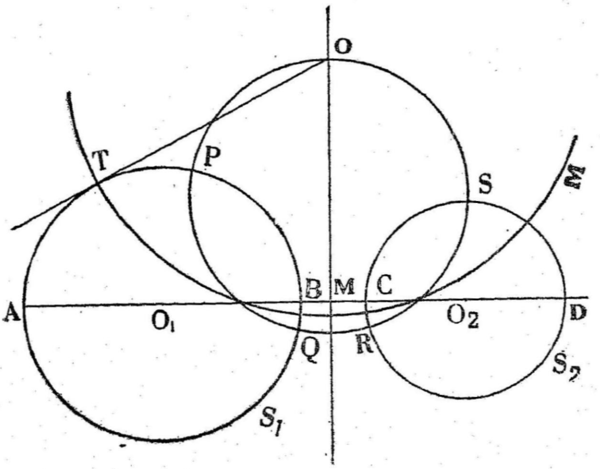
$$\therefore \quad \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = \frac{\dfrac{r^2 \cdot B'D'}{OB' \cdot OD'} \cdot \dfrac{r^2\, C'E'}{OC'\, OE'} \cdot \dfrac{r^2 A'F'}{OA' \cdot OF'}}{\dfrac{r^2 D'C'}{OD'\, OC'} \cdot \dfrac{r^2 E'A'}{OE' \cdot OA'} \cdot \dfrac{r^2 F'B'}{OF' \cdot OB'}}$$

$$= \frac{B'D'}{D'C'} \cdot \frac{C'E'}{E'A'} \cdot \frac{A'F'}{F'B'}$$

$$= 1.$$ (நிருபித்தபடி)

4. S_1, S_2 என்னும் இரு வட்டங்களின் மையப்பிணைக் கோடு அவற்றை முறையே, A, B; C, D யில் வெட்டுகின்றது. S_1, S_2 வைக் குத்தாக வெட்டும் ஒரு வட்டம் அவற்றை முறையே P, Q; R, S இல் வெட்டுகிறது.

$$\frac{AB \cdot CD}{AD \cdot CB} = \frac{PQ \cdot RS}{PS \cdot RQ}$$ எனக் காட்டுக.



V படம் 59

கொள்கை : (1) S_1, S_2 இரண்டு வட்டங்கள். O_1, O_2 அவற்றின் மையங்கள் ஆகட்டும்.

(2) AB, CD ; O_1 O_2 வில் உள்ள விட்டங்கள்.

(3) $PQRS$, S_1, S_2 ஐக் குத்தாக வெட்டுகிறது.

நிரூபிக்க : $\dfrac{PQ \cdot RS}{PS \cdot RQ} = \dfrac{AB \cdot CD}{AD \cdot CB}$ என.

நிருபணம் : வட்டம் $PQRS$, S_1, S_2 இன் சமத்தொடுகோட்டச்சை O வில் வெட்டட்டும். O விலிருந்து வட்டம் O_1) க்குத் தொடுகோடு OT_1 வரைக.

O வை மையமாகவும் OT ஆரமாகவும் உள்ள வட்டத்துக்கு தன் மாற்றம் செய்க.

1. தன்மாற்றி வட்டம் S_1, S_2 வைக் குத்தாக வெட்டுகிறது. ∴ S_1, S_2 வின் தன்மாற்றுகள் அவையே.

(2) வட்டம் $OPQRS$ இன் தன்மாற்று ஒரு நேர்கோடாகும் அது S_1, S_2 ஐக் குத்தாழ வெட்டும்.

∴ அது அவற்றின் மையப்பிணை கோடாகும்.

(அ-து) ⊙$PQRS$ இன் தன்மாற்று $ABCD$ ஆகும்.

(3) O க்கு, P யின் தன்மாற்றுப்புள்ளி, $ABCD$ என்னும் கோட்டிலும் உண்டு.

$\odot S_1$ க்கு $\odot (O)$ குத்து வட்டம்.

$\therefore$ அது S_1 இலும் உண்டு.

$\therefore$ P யின் தன்மாற்றுப்புள்ளி A ஆகும். அதுபோலவே, Q, R, S இன் தன்மாற்றுகள் B, C, D ஆகும்.

$$\therefore \frac{PQ}{AB} = \frac{r^2}{OA.OB} = \frac{OP.OQ}{r^2}.$$

$$\therefore PQ = \frac{r^2 . AB}{OA.OB}.$$

அதுபோலவே

$$RS = \frac{r^2 . QD}{OC.OD}.$$

$$PS = \frac{r^2 . AD}{OA.OD}.$$

$$RQ = \frac{r^2 . CB}{OC.OB}.$$

$$\therefore \quad \frac{PQ . RS}{RS . RQ} = \frac{AB.CD}{AD.CB}.$$

$$= (ABCD).$$

குறிப்பு : A, B, C, D ஒரு நேர்கோட்டில் உள்ளதால்

$$\frac{AB . CD}{AD . CB} = \text{ குறுக்கு விகிதம் } (ABCD).$$

P, Q, R, S நேர்கோட்டில் இல்லாததால்
$\frac{PQ . RS}{PS . PQ} = (PQRS)$ என்று சொல்வது தவறு.

பயிற்சி 24 (a)

1. $AB = L$, $BC = a$, $AC = b$. $OA = d$, $OB = c$, $OC = f$. தன்மாற்றி ஆரம் r.

A, B, C யை Oக்குத் தன் மாற்றம் செய்தால் $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ இவற்றின் நீளங்கள் என்ன ?

2. O, A, B, C, D ஒரு கோட்டிலுள்ள புள்ளிகள். O க்கு அவற்றின் தன்மாற்றுகள் A', B', C', D'.

$(ABCD) = (A'B'C'D')$ என நிருபிக்கவும்.

3. $ABCD$ ஒரு சதுரம். அதன் சுற்று வட்டத்தில் O ஒரு புள்ளி. O க்குத் தன்மாற்றம் செய்தால் $A\ B\ C\ D$ யின் தன் மாற்றுப் புள்ளிகள் A', B', C', D' ஆகும். $(A'B'C'D') = 1$ என நிருபிக்கவும்.

பயிற்சி 24 (b)

1. முக்கோணம் $A\ B\ C$ யின் சுற்று வட்டத்தின் மேல் ஒரு புள்ளி P யிலிருந்து BC, CA, AB க்கு PL, PM, PN என்னும் குத்துக் கோடுகள் வரையப்படுகின்றன.

$$\therefore \frac{BC}{PL} + \frac{CA}{PM} + \frac{AB}{PN} = 0.$$

(உதவிக்குறிப்பு--Pக்குத் தன்மாற்றம் செய்க.

$\dfrac{BC}{PL} = \dfrac{B'C'}{p'}$. $A'B'C'$ ஒரு நேர்கோடு)

2. OP, OQ இரண்டு நிலைத்த கோடுகள். A, B முறையே OP, OQ வில் புள்ளிகள். A', B', O க்கு அவற்றின் தன்மாற்றுப் புள்ளிகள். $A\,B$, O விலிருந்து ஒரே தூரத்தில் நகர்ந்தால், $A'B'$ இன் நீளம் மாருது என நிருபிக்கவும்.

3. மூன்று வட்டங்கள் O வழிச் செல்கின்றன. அவை மறுபடியும் இரண்டிரண்டாக ABC யில் வெட்டுகின்றன. AO, BO, CO மற்ற வட்டங்களை முறையே P, Q, L இல் வெட்டுகின்றன.

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1.$$

என நிருபிக்கவும்.

4. D, BC யின் நடுப்புள்ளி. O அக்கோட்டுக்கு வெளியே ஒரு புள்ளி. O க்குத் தன்மாற்றம் செய்ய, B, D, C யின் தன் மாற்றுகள் $B'D'C'$ ஆனல், $\dfrac{B'D'}{D'C'} = \dfrac{OC}{OB}$ என நிருபிக்கவும்.

5. முக்கோணம் ABC யின் சுற்று வட்டத்தை $\odot PBC$ குத்தாக வெட்டுகிறது.

$PA^2.BC^2 = PB^2.CA^2 + PC^2\text{-}AB^2$

என நிருபிக்கவும்.

6. இரண்டு வட்டங்களின் மையப்பிணைகோடுக் (line of centres) அவற்றை முறையே $A, B; C, D$ யில் வெட்டுகிறது. ஏதாவது ஒருபுள்ளியைப்பொருத்து இவற்றின் தன்மாற்றுகளின் மையப்பிணைக்கோடு அவற்றை P', Q'; R', S' இல் வெட்டினுல்,
$(ABCD) = (P'Q'R'S')$ என நிருபிக்கவும்.

(உதவிக் குறிப்பு :— O தன் மாற்றி மையம் என்றுல், $OA'B'C'D'$ ஒரு வட்டம். அது S_1', S_2' ஐக் குத்தாக வெட்டும். மாதிரி 4 ஐ உபயோகிக்கவும்)

7. முக்கோணம் ABC யில் O குத்துமையம். $\triangle ABC$ யின் 9-புள்ளிவட்டம், $\triangle AOB$, $\triangle BOC$, $\triangle COA$ இன் பக்கங்களைத் தொடும் 12 வட்டங்களையும் தொடும் எனக் காட்டுக.

(உதவிக்குறிப்பு–$\triangle ABC$யின் 9-புள்ளிவட்டம், $\triangle AOB$யின் 9-புள்ளிவட்டமாகும் என நிறுவுக)

8. AD, BE, CF முக்கோணம் ABC யின் குத்துக்கோடுகள் $\odot DCE$, $\odot EAF$, $\odot FBD$ ஐத் தொடும் வட்டங்கள் $\odot ABC$ யை தொடும் என நிருபிக்கவும்.

(உதவிக்குறிப்பு– போலார் வட்டத்துக்குத் தன் மாற்றம் செய்க)

பயிற்சிகள் செய்ய சில உதவிக் குறிப்புகள்

1. பொதுவில் அதிமமான வட்டங்கள் கூடும் புள்ளியைத் தன் மாற்றி மையமாகக் கொள்க. அப்போது அந்த வட்டங்கள் நேர் கோடுகளாகும்.

2. இரண்டு தொடும் வட்டங்களை இரண்டு இணைகோடுகளாகத் தன்மாற்றம் செய்யலாம்.

3. இரண்டு குத்து வட்டங்களை இரண்டு குத்துக் கோடுகளாகத் தன் மாற்றம் கசய்த்லாம்.

4. ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லும் மூன்று வட்டங்களை 3 நேர் கோடுகளாகத் தன்மாற்றம் செய்யலாம். கொடுக்கப்பட்ட வட்டங்கள் இன்னொரு புள்ளியில் சந்தித்தால், 3 நேர் கோடுகளும் ஒரு புள்ளிவழிக் கோடுகள் ஆகும். இல்லா விட்டால் அவை ஒரு முக்கோணமாகும்.

5. ஓரச்சு வட்டங்களை, வெட்டும் வட்டங்களானுல் ஒரு புள்ளி வழிக்கோடுகளாகத் தன்மாற்றம் செய்க. வெட்டாத வட்டங்களால், பொதுமைய வட்டங்களாகத் தன் மாற்றம்

இவற்றைக் குத்தாக வெட்டும் வட்டம் L, L' வழிச் செல்லும் ஆதலால் அதன் தன்மாற்று வட்டங்களின் பொது மையம் வழிச் செல்லும்.

6. ஒரு நிலையில்லாத புள்ளிக்குந் தன்மாற்றம் செய்யாதே.

7. எப்போது ஒரு படத்தின் தன் மாற்று அதுவே

(1) ஒரு நேர் கோடு.	தன் மாற்றி மையம் அதில் ஒரு புள்ளி.
(2) ஒரு வட்டம் —	(a) அதுவே தன்மாற்றி வட்டமானால்
	(b) ஒரு குத்து வட்டத்துக்குத் தன்மாற்றம் செய்தால்
(3) இரண்டு வட்டங்கள்	ஒரு குத்து வட்டத்துக்குத் தன்மாற்றம் செய்தால்
(4) மூன்று வட்டங்கள்	,, ,, ,,
(5) இரண்டு வட்டங்கள்	வடிவொப்பு வட்டத்துக்கு தன்மாற்றம் செய்தால் ஒன்று மற்றொன்று ஆகும்.

8. ஒரு வட்டத்தின் விட்டம் அதற்கு குத்து வட்டமாகத் தன்மாற்றமாகும்.

9. வட்ட நாற்கரத்திலுள்ள புள்ளிகள் ஒரு நேர்கோட்டில் அமையும் புள்ளிகள் ஆகும்.

10. $\triangle ABC$ யைச் சுற்று வட்டத்தில் ஒரு புள்ளிக்குத் தன் மாற்றம் செய்தால் $A'B'C'$ ஒரு நேர் கோடாகும்.

11. $\triangle ABC$ யைப் போலார் வட்டத்துக்குத் தன்மாற்றம் செய்க. A, D; B, E; C, F தன் மாற்றுப் புள்ளிகள்.

12. O வழிச் செல்லும் பல வட்டங்கள் இருந்தால்
(உ—ம்) $\odot OAB$, $\odot OBC$, $\odot OCD$,..................
O வுக்குத் தன் மாற்றம் செய்க, அவை முறையே $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$.........ஆகும் (O வை விட்டுவிட்டு எழுதலாம்.)

13. ஒரு நேர் கோட்டின் தன்மாற்று ஒரு வட்டம். அது O வழிச்செல்லும்.

(உ—ம்) AB யின் தன்மாற்று $\odot OAB$
BC யின் தன்மாற்று $\odot OBC$
ABC யின் தன்மாற்று $\odot OABC$
(O சேர்த்து வரும் வட்டம் என்பதைக் கவனிக்கவும்)

14. தன் மாற்றுப் படம் வரைந்தவுடன் கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனைகள் சரியாக உள்ளனவா என்று சரிபார்க்கவும்.

15. தன் மாற்றுகள் சமம் என்று நிரூபிக்க

வட்டத்தை நேர் கோடாகத் தன்மாற்றம் செய்க. அதற்குத் தன்மாற்றுகள் நேர் கோட்டில் ஒன்றுக்கொன்று பிம்பங் களாகும்.

16 படம் வரையும் போது தன் மாற்றி வட்டத்தையும் எல்லா வட்டங்களையும் வரையவேண்டியதில்லை. முக்கியமான வற்றை மட்டும் வரைந்தால் போதும்.

பலவகைக் கணக்குகள்

1. ⊙ ABC யை BC யாகத் தன் மாற்றம் செய்யும் தன் மாற்றி வட்டம் யாது ?

2. 3 வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று A, B, C யில் தொடு கின்றன. இவற்றை A, B, C யில் தொடும்படியும் இன்னொரு புள்ளி O வழியே, செல்லும் படியும் வரையப்படும் வட்டங்கள் மற்றொரு புள்ளி வழியேயும் செல்லும் என நிரூபிக்க.

3. C_1, C_2, C_3 என்றும் மூன்று வட்டங்களும் P, Q வில் வெட்டுகின்றன. ஒரு வட்டம் C_1, C_2 ஐ $A, B; C, D$ யில் வெட்டுகிறது. மற்றொரு வட்டம் C_2 C_3 ஐ $C, D; E, F$ இல் வெட்டுகிறது. $A, B; E, F$ மற்றொரு வட்டப் பரிதியிலுள்ளவை என நிரூபிக்கவும்.

4. நான்கு வெட்டும் கோடுகளை மூன்று மூன்றாக எடுக்கக் கிடைக்கும் நான்கு முக்கோணங்களின் சுற்று வட்டங்கள் ஒரு புள்ளி வழியே செல்லுகின்றன என்றும், அந்த நான்கு வட் டங்களின் மையங்களும் அப்புள்ளி வழியே செல்லும் ஒரு வட்டப் பரிதியிலுள்ளவை என்றும் நிரூபிக்கவும்.

5. T, B, C, D ஒரு வட்டப் பரிதிலுள்ளவை. C_1, C_2, C_3, C_4 என்றும் வட்டங்கள் $T, B; T, C; C, D; D, B$ வழிச் செல்லு கின்றன. C_1, C_2 A யிலும், C_2, C_3 E யிலும், C_3, C_4 O விலும், C_4, C_1, F இலும் மறுபடியும் வெட்டுகின்றன. A, E, O, F ஒரு நேர்கோட்டில் அல்லது ஒரு வட்டப் பரிதியில் அமைவன என நிரூபிக்கவும்.

(உதவிக் குறிப்பு — T க்குத் தன் மாற்றம் செய்க.)

6. ஒரு ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியிலுள்ள எல்லா வட்டங் களையும் ஒரு வட்டம் குத்தாக வெட்டுகிறது. ஒரு எல்லைப் புள்ளி வழியாக, இந்த வட்டத்தைக் குத்தாக வெட்டவும்,

ஓரச்சு வட்டக் தொகுதியிலுள்ள ஏதாவது ஒரு வட்டத்தைத் தொடவும் இரண்டு வட்டங்கள் வரைய முடியும் எனக் காட்டுக.

7. ஒரு நேர்கோட்டில் A, B இரண்டு நிலைத்த புள்ளிகள். P அதற்கு வெளியே ஒரு புள்ளி. C, AB யின் மேல் நகர்ந்தால், வட்டங்கள் PAC, PBC ஒரே கோணத்தில் வெட்டுகின்றன என நிரூபிக்கவும்.

8. மூன்று வட்டங்கள் குத்தாக வெட்டுகின்றன. அவற்றின் பொது நாண்கள் AD, BE, CF.

(1) $\odot\ BCD$, $\odot\ BAF$; $\odot\ BCA$, $\odot\ BFD$; $\odot\ ABC$, $\odot\ AEF$; $\odot ACE$, $\odot\ ABF$ இவை ஒன்றையொன்று தொடு கின்றன என நிரூபிக்கவும்.

(2) $\odot\ BCE$, $\odot\ BDE$; $\odot\ BEF$; $\odot\ BAE$, $\odot\ BCE$, $\odot\ BAE$; O BDE, OBEF, இவை குத்து வட்டங்கள் எனவும் நிரூபிக்கவும்.

9. P, AC யை விட்டமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தின் மேல் ஒரு புள்ளி. B, AC யில் ஏதாவது ஒரு புள்ளி ஆனால், வட்டங்கள் PAB, PBC குத்து வட்டங்கள் என நிரூபிக்கவும்.

10. r_1, r_2 ஆரங்கள் உள்ள இரண்டு வட்டங்கள் வெட்டு கின்றன. அவற்றின் பொதுத் தொடுகோட்டின் நீளம் t. இரு வட்டங்களையும் தன்மாற்றம் செய்தால் $\dfrac{t_2}{r_1\ r_2}$ மாறுது என நிரூபிக்கவும்.

11. வட்டம் S, ஒரு நேர்கோட்டை O வில் தொடுகிறது. S க்கு S_1, S_2 தன்மாற்றுகள். S, S_1, S_2 ஐ O வுக்குத் தன்மாற்றம் செய்க. அவற்றின் தன் மாற்றுகள் முறையே S', S_1', S_2' என்றால் S_1', S_2' சம வட்டங்கள் என நிரூபிக்கிவும்.

12. வட்டம் $\sum$ க்கு, வட்டங்கள் S, S' தன்மாற்றுகள். S க்கு P, Q தன்மாற்றுப் புள்ளிகள், P', Q' அவற்றின் தன் மாற்றுப்புள்ளிகள். P, P', Q; Q' ஒரு வட்டப் பரிதியிலுள்ள புள்ளிகள் என்றும் அவற்றின் வழியே செல்லும் S, S', $\sum$ இவற் றைக் குத்தாக வெட்டும் என்றும் நிரூபிக்கவும்.

13. இரு வட்டங்கள் குத்தாக வெட்டுகின்றன. C_1 இவை இரண்டையும் தொடுகிறது. C_2 இரு வட்டங்களையும் தொடும் படியும், C_2 ஐ க்குத்தாக வெடடும் படியும் வரையப்படுகிறது. C_3, இரு வட்டங்களையும் தொடும்படியும் C_2 ஐக் குத்தாக வெட்டும்படியும் வரையப்படுகிறது. C, இரு வட்டங்களையும் தொடும்படியும், C_2 ஐக் குத்தாக வெட்டும் படியும் வரையப் படுகிறது C_1, C_2, C_3 இவை வெட்டும் புள்ளிகள் கொடுக்கப் பட்ட வட்டங்களுள் வெட்டும் புள்ளிகளின் அவற்றை 15 யில் வெட்டும் இரண்டு வட்டங்களில் அமைகின்றன என நிரு பிக்கவும்.

14. மூன்று வட்டங்கள் C_1, C_2, C_3 புள்ளி O வில் வெட்டு கின்றன. $C_2, C_3; C_3, C_1; C_1 C_2$ மறுபடியும் A, B, C யில் வெட்டு கின்றன. O வழியே செல்லும் மற்றொரு வட்டம் C_1, C_2, C_3 ஐ முறையே D, E, F இல் வெட்டுகிறது.

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1 \text{ என நிருபிக்கவும்.}$$

15. S, S' என்னும் இரு வட்டங்களுக்கு A யின் தன் மாற்றுப் புள்ளிகள் P, O. S, S' உடன் ஓரச்சு வட்டம் ஒன்றின் மேல் A, நகர்ந்தால் $P\ Q$ ஒரு நிலைத்த புள்ளி வழிச் செல்லும் என நிருபிக்கவும். (செ. ப)

16. வட்டத்தின் மேல் அல்லாத ஒரு புள்ளிக்குத் தன் மாற்றம் செய்க:—

"அரை வட்டத்தில் உள்ள கோணம் செங்கோணம்" தன் மாற்றி மைய வட்டத்தின் மேல் அமைந்தால் என்ன முடிவு கிடைக்கும்? (செ. ப)

17. ஒரு முக்கோணத்தின் சுற்று வட்டத்தின் தன்மாற்று உள் வட்டத்தைப் பொருத்து, உள் வட்டம் தொடும் புள்ளி களை இணைக்கும் முக்கோணத்தின் ஒன்பது புள்ளி வட்டமாகும் என நிருபிக்கவும். (செ. ப)

18. $\triangle ABC$ யின் பக்கம் BC யின் மேல் வரையப்பட்ட சம புஜ $\triangle BCD$யில் D, BC க்கு A யின் எதிர்ப் பக்கத்தில் இருக் கிறது. AD, $\odot BCD$ யை மீண்டும் P யில் வெட்டுகிறது. Q ஏதாவது வட்டத்தின் உள்ளே ஒரு புள்ளி.

$QA + QB + QC > PA + PB + PC$ எனக் காட்டுக.

19. ஒரு கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்தைக் குத்தாகவும், மற்றொரு கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்தை ஒரு நிலைத்த (Constant) கோணம் α $\left(\neq \frac{\pi}{2}\right)$ யிலும் வெட்டும் படியும், வரையப்படும் வட்டங்கள் மூன்றுவது ஒரு வட்டத்தையும் அதே கோணத்தில் வெட்டும் என நிரூபிக்கவும். (செ.ப)

20. மூன்று வட்டங்களுக்கு ஒரு புள்ளி பொதுவாக இருந்தால், அவற்றையெல்லாம் தொடும்படி நான்கு வட்டங்கள் வரையலாம் என நிரூபிக்கவும். (செ.ப)

21. ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியிலுள்ள இரண்டு வட்டங்களில் ஒன்றைத் தொடும்படியும், அடுத்த வட்டத்தினுள்ளே உள்ளே எல்லைப் புள்ளி வழியேயும் வட்டங்கள் வரையப்பட்டால், அவை இரண்டாவது வட்டத்தை ஒரு மாருத கோணத்தில் வெட்டுகின்றன என நிரூபிக்கவும். (செ.ப)

22. ஒரு வட்டம் S, ஒரு நேர்கோடாக தன்மாற்றம் செய்யப்படுகிறது. இந்தக் கோடு, S, தன்மாற்றி வட்டம் சமத் தொடுகோடு கோட்டச்சு என நிரூபிக்கவும்.

23. O, P, Q, R, S ஒரு வட்டப் பரிதியிலுள்ள புள்ளிகள்.

$$\frac{PQ}{OP.\ OQ} + \frac{QR}{OQ \cdot OR} + \frac{RS}{OR \cdot OS} = \frac{PS}{OP \cdot OS}$$

என நிரூபிக்கவும்.

24. இரண்டு வட்டங்கள் கொடுத்தால், அவற்றுடன் ஓரச்சு உள்ளதும் ஒரு கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி வழியேயும் செல்லும் வட்டம் வரைமுறையை எழுதுக.

(செ. ப)

25. S_1, S_2, S_3, என்னும் மூன்று வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று குத்தாக வெட்டுகின்றன. AB, CD, EF அவற்றின் பொது நாண்கள். $\odot ACE$, $\odot ADF$ இவை A யில் தொடுகின்றன என நிரூபிக்கவும். (செ. ப)

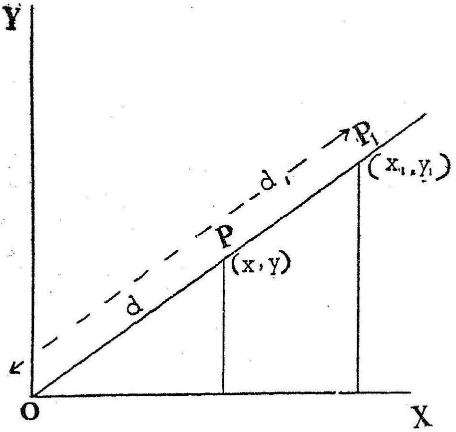
26. இரண்டு வட்டங்கள் A, B யில் வெட்டுகின்றன. A வழியே ஒரு கோடு வட்டங்களை LM இல் வெட்டுகிறது. A க்குத் தன்மாற்றம் செய்து, LM இன் நடுப்புள்ளியின் நியமப் பாதை இரண்டு கொடுக்கப்பட்ட வட்டங்களுடன் ஓரச்சு வட்டமாகும் என நிரூபிக்கவும். (செ.ப)

ஆய வடிவக் கணிதப்படி தன்மாற்றம் (Inversion with cartesian coordinates)

O விலிருந்து d தூரத்திலுள்ள புள்ளி P யின் ஆயத் தொலைகள் (x, y)

$P_1 (x_1, y_1)$ அதன் தன்மாற்று ஆகட்டும்.

$OP_1 = d_1$ ஆகட்டும்.



V படம் 60

$d\,\alpha_1 = \gamma_2$. (r தன்மாற்று ஆரம் என்போம்)

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$d_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}.$$

மேலும் $\dfrac{x_1}{x} = \dfrac{d_1}{d} = \dfrac{y_1}{y}$.

$$\therefore \quad x_1 = \frac{d_1}{d}\,x.$$

$$= \frac{dd_1}{d^2}\,x$$

$$= \frac{r^2}{d^2}\,x$$

$$= \frac{r^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,x. \qquad (1)$$

அதுபோலவே $y_1 = \dfrac{r^2}{d^2}\,y$

$$= \frac{r^2}{\sqrt{x^2+y^2}} y \qquad (2)$$

$$x = \frac{d}{d_1} \cdot x_1$$

$$x = \frac{dd_1}{d_1^2} \cdot x_1$$

$$= \frac{r^2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}} \cdot x_1 \qquad (3)$$

$$= \frac{r^2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}} \cdot y_1 \qquad (4)$$

தன்மாற்றம் (Inversion)

கொடுக்கபபட்ட ஒரு சாமியத்தில் $x_1\,y$ க்கு மேற்கண்ட மதிப்புகள் பிரதியிட அவற்றின் தன்மாற்றுகளின் சாமியங்கள் கிடைக்கும்.

1. ஆதிப்புள்ளி (Origin) வழிச் செல்லும் ஒரு நேர் கோட்டின் தன்மாற்று

நேர் கோட்டின் சாம்யம் $ax = by$

இதில் பிரதியிட

$$a. \frac{r^2}{d_1^2} x_1 = b \frac{r^2}{d_1^2} y^2$$

(அ—து) $ax_1 = by_1$

∴ சாம்யம் $ax = by$.

ஆகையால் ஒரு நேர்கோட்டின் தன்மாற்று அதன் மேல் உள்ள ஒரு புள்ளிக்கு அதுவேயாகும்.

2. $ax + by + c = 0$ இன் தன்மாற்று

x, y க்கு மதிப்புகள் பிரதியிட

$$a. \frac{r^2}{d_1^2} x_1 + b. \frac{r^2}{d_1^2} y_1 + c =$$

$$\therefore\ r^2 . ax_1 + r^2 . by + c \cdot (x_1^2 + y^2) = 0.$$

∴ x, y இன் நியமப்பாதை,

$$C(x^2 + y^2) + ax \cdot r^2 + by\, r^2 = 0$$

(அ-து) ஆதிப்புள்ளி வழியே செல்லும் ஒரு வட்டம்.

3. $x^2+y^2=a^2$ என்னும் வட்டத்தின் தன்மாற்று தன்மாற்றி மையம் வட்டத்தின் மையம் ஆகும்.

$$x = \frac{r^2}{d_1^2} \cdot x_1 \qquad y = \frac{r^2}{d_1^2} \cdot y_1.$$

$$x^2+y^2=a^2$$

$$\therefore \quad \frac{r^4}{d_1^4} x_1^2 + \frac{r^4}{d_1^4} \cdot y_1^2 = a^2$$

$$\therefore \quad \frac{r^4\,(x_1^2+y_1^2)}{(x_1^2+y_3^2)^2} = a^2.$$

$$\therefore \quad r^4 = a^2\,(x_1^2+y_1^2)$$

$$\therefore \quad x_1^2+y_1^2 = \frac{r^4}{a^2}$$

$\therefore$ (x_1, y_1) இன் நியமப்பாதை

$$x^2+y^2 = \frac{r^4}{a^2}.$$

$\therefore$ தன்மாற்று அதே மையமுள்ள மற்ருெரு வட்டமாகும்.

4. ஆதிப்புள்ளி (தன்மாற்றி மையம்) வழியே செல்லும் வட்டத்தின் தன்மாற்றம்

சாமியம் $x^2 + y^2 + 2gx + 2fg = 0.$

பிரதியிட $d^2 + 2\,gx_1 \cdot \dfrac{d^2}{r^2} + fg_1 \cdot \dfrac{d^2}{r^2} = 0.$

$\therefore$ $2\,gx_1 + 2\,f\,y_1 + r^2 = 0.$

$\therefore$ $(x_1\,y_1)$ இன் நியமப் பாதை ஒரு நேர்கோடு.

V. $x^2+y^2+2\,gx+2\,fy+c=0$ இன் தன்மாற்று

(அ–து) $d^2 + 2g \cdot \dfrac{d^2}{r^2} \cdot x_1\; 2f \cdot \dfrac{d^2}{r^2} \cdot y_1 + c = 0.$

$$\therefore \quad 2gx_1 + 2\,fy_1 + c\;\frac{r^2}{d^2} + 1 = 0.$$

$$\therefore \quad 2\,gx_1 + 2fy_1 + c \cdot \frac{d_1^2}{r^2} + 1 = 0.$$

$$\therefore \quad c \cdot (x_1^2+y_1^2) + 2\,gr^2 \cdot x_1 + 2fr^2 \cdot y_1 + r^2 = 0$$

$\therefore$ (x_1, y_1) இன் நியமப்பாதை

$$c\,(x^2+y^2) + 2\,gr^2\,x + 2\,fr^2\,y + r^2 = 0.$$

(அ–து) அது ஒரு வட்டம் ஆகும்.

கலைச் சொற்கள்

ஆங்கிலம் - தமிழ்

A

Angle	—	கோணம்
,, Acute	—	குறுங்கோணம்
,, Adjacent	—	அடுத்துள்ள கோணம்
,, Alternate	—	ஒன்றுவிட்ட கோணம்
,, Complementary	—	நிரப்புக் கோணம்
,, Corresponding	—	ஒத்த கோணம்
,, Obtuse	—	விரிகோணம்
,, Opposite	—	எதிர்கோணம்
,, Right	—	செங்கோணம்
,, Supplementary	—	மிகை நிரப்புக் கோணம்
,, Vertical	—	உச்சிக் கோணம்
,, Vertically opposite	—	குத்தெதிர் கோணம்
Angle at the centre	—	மையக் கோணம்
,, at the circumference	—	பரிதிக் கோணம்
,, in a segment of a circle	—	ஒரு வட்டத் துண்டுக்கோணம்
,, in a Semi circle	—	ஓரரை வட்டக்கோணம்
Cross ratio	—	குறுக்கு விகிதம்

B

Bisect	—	இருசமக் கூறிடு
Bisector	—	இருசம வெட்டி
,, external	—	வெளியிரு சமவெட்டி
,, internal	—	உள்ளிரு சமவெட்டி
,, perpendicular	—	மையக் குத்துக் கோடு

C

Centre	—	மையம்
,, circum	—	சுற்று வட்ட மையம்
,, ex	—	வெளிவட்ட மையம்
,, ortho	—	செங்குத்து மையம், குத்துச் சந்தி
Centroid	—	நடுக்கோட்டு மையம்
Chord	—	நாண்
,, common	—	பொது நாண்
,, of contact	—	தொடு நாண்
Circle circumscribed	—	சுற்று வட்டம்
Circle concentric	—	பொதுமைய வட்டம்
,, nine points	—	ஒன்பது புள்ளி வட்டம்
,, orthogonal	—	குத்து வட்டம்
Circum centre	—	சுற்றுவட்ட மையம்
,, circle	—	சுற்று வட்டம்
Circumference	—	பரிதி
Circumscribe	—	சுற்றி வரை
Coaxal	—	பொதுவச்சுள்ள
,, Circles	—	ஓரச்சு வட்டங்கள்
Coincide	—	பொருந்து
Collinear	—	ஒரு கோடமை
Common tangent, direct	—	நேர் பொதுத் தொடு கோடு
,, ,, transverse	—	குறுக்குப் பொதுத் தொடு கோடு
Complementary angle	—	நிரப்புக் கோணம்
Complete quadrangle	—	முழுநாற்கோணம்
,, quadrilateral	—	முழு நாற்கரம்
Componendo et dividendo	—	கூட்டல் கழித்தல் விகித சமம், கூட்டுக்கழி விகித சமம்
Concentric circles	—	ஒரு மைய வட்டங்கள், பொது மைய வட்டங்கள்
Concurrent lines	—	ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள்
Concyclic	—	ஓரே பரிதியிலுள்ள
Condition	—	நிபந்தனை
Conjugate	—	இணையிய
,, lines	—	துணையியக் கோடுகள் காஞ்சுகேட் கோடுகள்
,, points	—	துணையியப் புள்ளிகள் காஞ்சுகேட் புள்ளிகள்.

Conjugate harmonic	—	இசைத் துணை
,, triangle, self	—	தன்னிசை முக்கோணம்
Constant	—	மாறு, மாறுத, மாறிலி, நிலையெண்
Construct	—	வரை
Contact point of	—	தொடு புள்ளி
Converse	—	மறுதலை

D

Define	—	வரையறு
Definition	—	வரையறை
Diagonal	—	மூலை விட்டம்
Diagonal point triangle	—	மூலைப்புள்ளி முக்கோணம்
Diameter	—	விட்டம்
Duals	—	இருமைகள்
Dual of a theorem	—	தேற்றத்தின் இருமை (இருபான்மை)

E

Enunciation general	—	பொது விவரணம்
,, particular	—	சிறப்பு விவரணம்
Envelope	—	உறைப்படம், (என்வெலப்)
Equiangular	—	சமகோண
Equidistant	—	சமதூரமான
Equilateral	—	சம பக்க
Escribed circle or excircle	—	வெளிவட்டம்
External bisector	—	வெளியிரு சமவெட்டி

G

Geometric mean	—	பெருக்குச் சராசரி
,, progression	—	பெருக்குத் தொடர்
Geometry	—	வடிவ கணிதம், வரை கணிதம்
,, pure	—	தொகு வடிவ கணிதம்
Graph	—	வரைபடம்

H

Harmonic	—	இசை, ஹார்மோனிக்
,, Conjugate	—	இசைத்துணை ஹார்மோனிக் காஞ்சுகேட்

Harmonic division — இசைப் பிரிவு
,, mean — இசைச் சராசரி, ஹார்மோனிக் சராசரி.
,, pencil — இசைக் கோட்டுக் கற்றை, ஹார்மோனிக் கற்றை
,, progression — இசைத் தொடர்
,, range — இசைப்புள்ளி வரிசை, ஹார்மோனிக் வரிசை,
,, property — இசைப் பண்பு
,, system of points— ஹார்மோனிக் வட்டப் புள்ளிகள்
,, system of tangents — ஹார்மோனிக் வட்டத் தொடு கோடுகள்

I

Imaginary lines — கற்பனைக் கோடுகள்
,, number — கற்பனை எண்
,, points — கற்பனைப் புள்ளிகள்
Incentre — உள்வட்ட மையம்
Infinite — முடிவில்லாத, கந்தழி
Infinity — முடிவிலி
,, point at — எட்டாப்புள்ளி
Inscribe — உள்ளே வரை
,, a circle — உள்வட்டம் வரைதல்
Inscribed circle or incircle — உள்வட்டம்
Intersect — வெட்டு
,, point of intersection— வெட்டுப்புள்ளி
Inverse curve — தன்மாற்றுவரை
,, points — தன்மாற்றுப்புள்ளிகள்
Inversion — தன் மாற்றம்
,, Circle of — தன்மாற்றிவட்டம்
,, radius of — தன்மாற்றி வட்ட ஆரை
Invert — தன்மாற்றுகாண்

L

Line of centres — மையப் பிணைகோடு
Locus — நியமப்பாதை

N

Negative — எதிர்-நெகடிவ்

O

One and only — ஒரேயொரு
Orthocentre — குத்து மையம், குத்துச் சந்தி

P

Pedal — பாதத்திற்குரிய
,, triangle — பாத முக்கோணம்
Pencil — கற்றை
Pencil of lines — நேர்க் கோட்டுக் கற்றை
Perpendicular — செங்குத்தான, செங்குத்து
Perpendicular bisector — மையக் குத்துக் கோடு
Point fixed — நிலைத்த புள்ளி
Polar circle — தன்னிசை வட்டம், போலார் வட்டம்
Polar of a point — புள்ளியின் இசைக்கோடு (போலார்)
Pole — இசைப்புள்ளி (போல்)
Positive — நேர், பாஸிடிவ்
Progression geometric — பெருக்குத் தொடர்
,, harmonic — இசைத் தொடர்

Q

Q. E. D — (நிறுவ வேண்டியது.) நி.வே.

R

Radical — சமத் தொடுகோட்டுக்குரிய, மூலம்.
Radical centre — சமத் தொடுகோட்டச் சந்தி.
,, axis — சமத் தொடு அச்சு
Radius — ஆரம்
Range of Points — புள்ளி வரிசை
Ratio — விகிதம்
Rectangle — செவ்வகம்

S

Segment	—	துண்டு
Self conjugate	—	தன்னிசையான
,, triangle	—	தன்னிசை முக்கோணம்
Semi circle	—	அரை வட்டம்
Similar	—	வடிவொத்த
,, directly	—	நேராக வடிவொத்த
,, and similarly situated	—	வடிவொத்தும், ஒரே மாதிரி வைக்கப்பட்டதுமான
Similarity	—	வடிவொப்புமை
Similitude	—	வடிவொப்பு
,, centre of	—	வடிவொப்பு மையம்
,, circle of	—	வடிவொப்பு வட்டம்
Subtend	—	எதிர்கொள்
Supplement	—	மிகை நிரப்பி, பிற்சேர்வு
Snpplementary	—	மிகை நிரப்புகின்ற, பிற்சேர்கின்ற

T

Tangent (geometry)	—	தொடுகோடு
,, direct common	—	நேர் பொதுத் தொடுகோடு
,, transverse common	—	குறுக்குப் பொதுத் தொ(கோடு
Theorem	—	தேற்றம்
Trapezium	—	சரிவகம்

U

University (Madras)	—	சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்

கலைச் சொற்கள்

தமிழ் - ஆங்கிலம்

அடுத்துள்ள	—	adjacent
அரை வட்டம்	—	semi circle
அரை வட்டக் கோணம்	—	angle in a semicircle
ஆரம்	—	radius
இசை	—	harmonic
இசைப் புள்ளி வரிசை	—	harmonic range
இசைக் கோட்டுக் கற்றை	—	harmonic pencil
இசைத் துணை	—	harmonic conjugate
இசைப்புள்ளி (போல்)	—	pole
இசைக்கோடு (போலார்)	—	polar
இசைச் சராசரி	—	harmonic mean
இசைத் தொடர்	—	harmonic progression
இணையிய	—	conjugate
இணையியப் புள்ளிகள்	—	conjugate points
இணையியக் கோடுகள்	—	conjugate lines
இருசமக் கூறிடு	—	bisect
இருசமவெட்டி	—	bisector
இருபான்மை	—	duality
இருபான்மை நெறி	—	principle of duality
உறைப்படம்	—	envelope
உச்சிப் புள்ளி	—	vertex
உச்சிக்கோணம்	—	vertical angle
உள்வட்டம்	—	incircle
உள் வட்ட மையம்	—	incentre
உள்ளிரு சமவெட்டி	—	internal bisector
எட்டாப் புள்ளி	—	point at infinity
எதிர்	—	opposite

எதிரெண் — negative number
எதிர் கோணம் — opposite angle
எதிர்கொள் — subtend
ஒத்த — corresponding
ஒத்த கோணம் — corresponding angle
ஒத்த பக்கம் – corresponding side
ஒரு புள்ளிவழிக் கோடுகள் – concurrent lines
ஒரு கோடமைப் புள்ளிகள் — collinear points
ஒரே பரிதியிலுள்ள — concyclic
ஒன்றுவிட்ட — alternate
ஒன்பது புள்ளி வட்டம் — nine points circle
ஓரச்சுள்ள — coaxal
ஓரச்சு வட்டங்கள் — coaxal circles
ஹார்மோனிக் — harmonic
ஹார்மோனிக் வட்டப் புள்ளிகள் — harmonic system of points on a circle
ஹார்மோனிக் வட்டத்தொடு கோடுகள் — harmonic system of tangents to a circle.
கற்பனை எண் — imaginary number
கற்பனைக் கோடு — imaginary line
கற்பனைப் புள்ளி — imaginary point
கற்றை — pencil
கற்றை (கோட்டுக்) — pencil (of lines)
காஞ்சுகேட் — conjugate
குத்து — perpendicular, ortho, orthogonal
குத்துமையம்-குத்துச்சந்தி — orthocentre
குத்துக்கோடு — altitude
குத்து வட்டம் — orthogonal circle
குத்தெதிர் கோணம் — vertically opposite angle
குறுக்குப் பொதுத் தொடுகோடு — transverse common tangent
குறுக்கு விகிதம் — cross ratio
குறுங்கோணம் — acute angle
கூட்டல் கழித்தல் விகிதசமம் — componendo dividendo
கோணம் — angle
கோணம்-விரி — obtuse angle
கோணம்-நிரப்பு — complementary angle
கோணம்-மிகை நிரப்பு — supplementary angle
சமம் — equal
சமகோணம் — equal angle

சமகோண — equiangular
சமபக்க — equilateral
சம தூரமான — equidistant
சமத்தொடு கோட்டச்சு — radical axis
சமத்தொடுகோட்டச்சுச் சந்தி— radical centre
சரிவகம் — trapezium
சுற்று வட்டம் — circumcircle
சுற்று வட்ட மையம் — circumcentre
செங்குத்து — perpendicular
செங்கோணம் — right angle
செவ்வகம் — rectangle
செ. ப. — சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்
தன்னிசை — Self-conjugate
தன்னிசை முக்கோணம் — self-conjugate triangle
தன்னிசை வட்டம் — self–polar circle
தன்மாற்றம் — inverse
தன்மாற்றுப் புள்ளி — inverse point
தன்மாற்று வரை — inverse curve
தன்மாற்று வட்டம் — circle of inversion
தன்மாற்று மையம் — centre of inversion
தன்மாற்றம் செய் — invert
துண்டு — segment
(வட்டத்)துண்டு — segment of a circle
தேற்றம் — theorem
தொடுகோடு — tangent
தொடுகோடு–பொது — common tangent
,, நேர்பொது — direct common tangent
,, குறுக்குப்பொது— transverse common tangen
தொடுநாண் — chord of contact
தொடுபுள்ளி — point of conduct
நடுக்கோடு — median
நடுக்கோட்டு மையம் — centroid
நாண் — chord
நாற்கரம் — quadrilateral
நாற்கரம் – முழு — complete quadrilateral
நாற்கோணம் — quadrangle
நாற்கோணம்–முழு — complete quadrangle
நிபந்தனை — condition
நிரப்புக் கோணம் — complementary angle
நிலையான, நிலைத்த — fixed

நியமப் பாதை — locus
நி. வே. (நிறுவ வேண்டியது) — Q.E.D.
நிறுவு — prove
நிரூபி — prove
நிரூபணம் — proof
நெகடிவ் — negative
நேரெண் — positive number
நேர்ப் பொதுத் தொடுகோடு — direct common tangent
பரிதி — circumference
பரிதிக் கோணம் — angle at the circumference
பாசிடிவ் — positive
பாத — pedal
பாதக்கோடு — pedal line
பாத முக்கோணம் — pedal triangle
புள்ளி வரிசை — range of points
பெருக்குச் சராசரி — geometric mean
பெருக்குத் தொடர் — geometric progression
பொது — common
பொது நாண் — common chord
பொதுத் தொடுகோடு — common tangent
பொதுமைய வட்டம் — concentric circle
பொருந்து — coincide
பொருத்து — with respect to, superpose
போல் — pole
போலார் — polar
மறுதலை — converse
மாறிலி-மாறுதது — constant
மிகை நிரப்பி — supplementary
மிகை நிரப்புக் கோணம் — supplementary angle
முடிவில்லாத — infinite
முடிவிலி — infinity
முழு நாற்கரம் — complete quadrilateral
முழு நாற்கோணம் — complete quadrangle
மையக் குத்துக் கோடு — perpendicular bisector
மையக் கோணம் — angle at the centre
மையப் பிணைக் கோடு — line of centres
மையப் புள்ளி (நடுப் புள்ளி) — mid-point
மையம் — centre
வட்டம் — circle

வட்டக் கோணப் பகுதி — sector of a circle
வட்ட வில் — arc of a circle
வட்டத் துண்டு — segment of a circle
வட்டத் துண்டுகோணம் — angle in a segment of a circle
வடிவ கணிதம் — geometry
வடிவ கணிதம்-சுத்த — pure geometry
வடிவொத்த — similar
வடிவொப்புமை — similarity, similitude
வடிவொப்பு வட்டம் — circle of similitude
வடிவொப்பு மையம் — centre of similitude
வரை — curve, line
வரையறை — definition
வரையறு — define
விகிதம் — ratio
விட்டம் — diameter
விரிகோணம் — obtuse angle
விவரணம் — enunciation
விவரணம் (பொது) — general enunciation
விவரணம்—சிறப்பு — particular enunciation
வெட்டு — intersect
வெட்டுப் புள்ளி — point of intersection
வெளி வட்டம் — excircle
வெளியிரு சமவெட்டி — external bisector
வெளி வட்டம் — ex-circle
வெளி வட்ட மையம் — ex-centre

BIBLIOGRAPHY

1. *A Course of Plane Geometry for Advanced Students* : Part I and II by Clement V. Durell, M.A., Macmillan and Company Limited.

2. *A Course of Pure Geometry* : By E. H. Askwith, Cambridge University Press.

3. *Pure Geometry* : By E. H. Askwith, Cambridge University Press.

4. *Cross Ratio Geometry* : By J. J. Milne, Cambridge University Press.

5. *Plane and Solid Geometry* : By Schultze, Macmillan and Company Limited.

6. *Pure Geometry* : By G. H. Hardy, Cambridge University Press.

7. *A Course of Pure Geometry* : By G. H. Hardy, Cambridge University Press.

8. *Elementary Treatise on Pure Geometry* : By Russl, Cambridge University Press.

9. *Advanced Pure Geometry* : By J. D. Hodson, Macmillan and Company Limited.

10. *Solved Examples in Modern Pure Geometry* : Manocha, Satya Prakashan (Hoshiarpur)